MATHÉMATIQUES
à l'Université
Cours et exercices corrigés

Collection dirigée par
Charles-Michel Marle
Philippe Pilibossian

La topologie des espaces métriques

niveau L3

Elisabeth Burroni





Présentation de la collection
"Mathématiques à l'Université"

Depuis 1997, cette collection se propose de mettre à la disposition des étudiants de troisième, quatrième et cinquième années d'études supérieures en mathématiques des ouvrages couvrant l'essentiel des programmes actuels des universités françaises. Certains de ces ouvrages pourront être utiles aussi aux étudiants qui préparent le CAPES ou l'Agrégation, ainsi qu'aux élèves des grandes écoles et aux ingénieurs désirant actualiser leurs connaissances.

Nous avons voulu rendre ces livres accessibles à tous : les sujets traités sont présentés de manière simple et progressive, tout en respectant scrupuleusement la rigueur mathématique. Chaque volume comporte, en général, un exposé du cours avec des démonstrations détaillées de tous les résultats essentiels, des énoncés d'exercices ou de problèmes.

L'ouvrage de Madame Elisabeth Burroni, que nous sommes heureux d'accueillir dans notre collection, propose une introduction à la Topologie particulièrement naturelle et aisée. Riche de sa grande expérience de l'enseignement, Madame Burroni a choisi de présenter la Topologie générale dans le cadre des espaces métriques ou métrisables ; cette approche rend les notions introduites assez concrètes pour être facilement assimilées. Les lecteurs seront très progressivement guidés dans leur apprentissage et pourront, grâce aux nombreux exercices répartis dans le texte, parvenir facilement à maîtriser les notions essentielles de la Topologie. L'épilogue de l'ouvrage donne des indications concises sur les aspects nouveaux qui apparaissent lorsque les espaces considérés ne sont pas supposés métrisables. Les lecteurs qui souhaitent aller plus loin pourront se reporter aux deux autres livres de Topologie de notre collection.

Charles-Michel Marle — Philippe Pilibossian

Au Professeur Alain-José Sahel,
à toute son équipe de l'hôpital des Quinze-vingts,
à leur compétence et à leurs recherches.

AVANT-PROPOS

L'étudiant qui entre en L3, la troisième année de la nouvelle licence, a déjà une certaine pratique de l'analyse dans les espaces $\mathbb{R}^n$; il a donc, tout comme Monsieur Jourdain pour la prose, fait de la topologie sans le savoir. En effet, dans ces espaces on manipule sans cesse les distances naturelles (telles que la distance usuelle de $\mathbb{R}$, la distance euclidienne de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$ ...etc) à l'aide desquelles on définit les notions de limites de suites ou de fonctions, ou encore celle de continuité ; ce qui est un premier pas vers la topologie de ces espaces. Un certain nombre de connaissances acquises lors des deux premières années de la nouvelle licence (L1 et L2, qui correspondent à l'ancien DEUG) sont rappelées de façon précise dans le chapitre préliminaire qui est une sorte de catalogue des connaissances nécessaires pour aborder ce cours de topologie (de multiples exemples et contre-exemples en facilitent la lecture).

En dégageant les propriétés essentielles des distances naturelles des $\mathbb{R}^n$, on est amené à définir le concept, général mais aussi très intuitif, de distance qui est un outil adéquat pour faire de la topologie. Les espaces métriques (*i.e.* les ensembles munis d'une distance) donnent un cadre simple et général dans lequel les connaissances antérieures vont s'insérer tout naturellement ; plus précisément, c'est un cadre fédérateur de bien des notions apparemment disparates. C'est surtout la porte ouverte à l'analyse étudiée en fin de licence et dans le master.

La structure d'espace métrique étant suffisamment riche pour les mathématiques auxquelles nous nous intéressons ici, nous nous limiterons aux espaces topologiques dits métrisables, *i.e.* dont la topologie est définie à l'aide d'une distance.

Cet ouvrage s'adresse donc aux étudiants de licence qui veulent traverser la topologie sans trop de peine ; la topologie des espaces métriques est une topologie plus concrète (et donc plus proche de l'étudiant) que la topologie dite générale. On y manipule essentiellement des suites convergentes. Les définitions principales de ce livre font référence à cette notion ; c'est possible pour un espace métrique, contrairement aux espaces topologiques généraux (voir le prologue et l'épilogue auxquels il nous paraît essentiel de réfléchir avant de quitter ce livre). Le cheminement : espace métrique, espace normé, espace de Hilbert, est ici tout naturel et nous permet de donner au passage une belle application aux séries de Fourier.

La plupart des énoncés du cours sont immédiatement suivis de remarques (dans lesquelles on privilégie le discours intuitif au détriment, parfois, de la rigueur), d'exercices (plus précisément d'exemples, de contre-exemples et d'applications proposés en exercices, souvent très simples) qui animent ces énoncés, leur donnent du relief, et en font comprendre le sens profond ; nous donnons en fin de livre des solutions à ces exercices (les références sont alors les numéros du cours où ils ont été cités). Certains d'entre eux sont traités dans l'ouvrage La géométrie du caoutchouc, Topologie cité en [1] dans la bibliographie ; on y fait alors référence par [1] suivi du numéro de l'exercice de l'ouvrage en question.

En fait, ce livre a mûri pendant les quatre années durant lesquelles j'ai enseigné ce cours (y compris les travaux dirigés) à l'université Paris 7 Denis Diderot. J'ai pu alors constater que le fait d'insérer dans le cours les exemples, contre-exemples et remarques, immédiatement après les énoncés qui les inspirent, le rendait très vivant aux yeux des étudiants et suscitait des questions en cascade. J'ai donc

conservé cette trame telle quelle ici pour préserver l'esprit dynamique de ce cours.

Finalement, ce livre est en quelque sorte un livre de cours en exercices : en effet, comme le remarquera assez vite le lecteur, à la plupart des énoncés du cours, on propose une preuve très simple dont on peut s'inspirer pour résoudre les exercices qui les suivent. C'est donc (et c'est une évidence) en travaillant son cours que l'on se familiarisera le mieux à l'esprit de la topologie : il ne s'agit pas ici d'appliquer des recettes de calculs, mais d'apprendre à raisonner ... tout en apprenant à apprendre.

REMERCIEMENTS : Nul autre que mon collègue et ami Jacques Penon ne pouvait faire une relecture aussi minutieuse de ce livre ; nous avons déjà "commis" ensemble un livre de topologie (voir [1] en bibliographie), réunis par la même conception de l'enseignement basée sur les références permanentes aux exemples concrets et sur le fait que nous attachons autant de soin et d'attention aux énoncés majeurs (dits théorèmes), qu'aux énoncés mineurs qui peuvent paraître anodins, mais qui sont souvent aussi riches d'enseignement. Les remarques judicieuses de René Guitart, un autre collègue ami, sont toujours aussi précieuses. J'ai aussi bénéficié de la compétence et de l'expérience d'enseignante de ma collègue Françoise Boschet.

Je n'oublie pas non plus Charles-Michel Marle, Professeur à l'université Paris 6 Pierre et Marie Curie, et aussi l'un des directeurs de cette collection, pour sa gentillesse et le temps qu'il m'a consacré afin que je puisse me conformer aux normes de mise en page de sa collection.

Qu'ils soient donc tous quatre chaleureusement remerciés.

TABLE DES MATIERES

PROLOGUE

Nous avons pris l'option, dans ce livre, de nous limiter à la topologie des espaces métriques. Ce choix est guidé d'une part par le fait que nous nous adressons à des étudiants qui n'auront pas un besoin approfondi de la topologie générale, d'autre part par le fait que, dans les espaces métriques, tout peut se dire simplement avec les suites. C'est pourquoi nous définissons le plus tôt possible la notion de suite convergente dans un espace métrique, chaque notion topologique étant ensuite définie, dans un premier temps, à l'aide de ces suites : d'abord les applications continues (*i.e.* celles qui conservent les suites convergentes), puis les fermés (*i.e.* les parties qui possèdent les limites de leurs suites convergentes), les ouverts étant définis *a posteriori* comme les complémentaires des fermés ; les espaces métriques compacts (*i.e.* les espaces métriques dans lesquels toute suite possède une sous-suite convergente). La notion d'espace métrique complet (*i.e.* les espaces métriques dans lesquels toute suite de Cauchy converge) occupe une place à part dans la mesure où ça n'est pas une notion topologique (elle n'est pas conservée par homéomorphisme) ; elle nous mène à une étude détaillée des espaces de Banach et des espaces de Hilbert.

Le fait d'aborder la connexité par le biais de la connexité par arcs répond au même souci de simplicité ; en fait, en licence (par exemple pour le calcul différentiel et les fonctions analytiques), on peut se limiter à la connexité par arcs, puisque, dans les espaces vectoriels normés, un ouvert est connexe si et seulement si il est connexe par arcs. Remarquons que, si l'on a défini ici les notions de connexité par arcs et de connexité seulement dans les espaces métriques, c'est parce que c'était le cadre de ce livre. En effet, la distance n'intervient pas dans le chapitre IX, pas plus que les suites convergentes ; seuls interviennent les ouverts, les fermés, les applications continues, toutes choses que l'on définit dans un espace topologique général.

Par ailleurs, si l'on n'a pas quotienté les espaces métriques, ça n'est pas pour éviter la difficulté, mais parce que le quotient d'un espace métrique est un espace topologique qui n'est pas toujours métrisable (*i.e.* sa topologie ne peut pas toujours se définir à l'aide d'une distance) ; on sortirait donc du cadre de ce livre.

On se reportera à l'épilogue où l'on parle brièvement de topologie générale, en faisant la part des choses : on repère (à l'aide d'exemples bien choisis) parmi les propriétés vraies dans les espaces métriques celles (assez rares à la réflexion) qui ne sont plus vraies dans les espaces topologiques non métrisables.

L'approche de la topologie par le biais des espaces métriques motivera, nous l'espérons, l'étudiant *a priori* intimidé par les théories abstraites, pour l'étude des espaces topologiques généraux que l'on ne peut ignorer quand on poursuit plus loin ses études de mathématiques.

Chapitre préliminaire
RAPPELS

1. Théorie des ensembles

Soit E et F deux ensembles, $(E_i)_{i\in I}$ et $(F_i)_{i\in I}$ deux familles d'ensembles, indexées par un ensemble I.

0.1.1 On notera $\in$ la *relation d'appartenance* : l'énoncé "$x \in E$" signifie que x est un *élément* (appelé aussi *point*) de E ; $\{x\}$ désigne l'ensemble (appelé *singleton*) réduit au seul élément x ; l'ensemble des $x \in E$ vérifiant la propriété P est noté $\{x \in E \mid P(x)\}$.

On dit que E est *inclus* dans F (ou que E est une *partie* de F, ou encore que E est un *sous-ensemble* de F), ce que l'on note $E \subset F$, si tout élément de E est un élément de F (*i.e.* si on a l'implication $x \in E \Longrightarrow x \in F$). En particulier, $x \in E \Longleftrightarrow \{x\} \subset E$ ("si et seulement si" sera abrégé en "ssi") ; on fera bien la différence entre l'appartenance et l'inclusion. Si A est une partie de E, on note $E - A$ (ou A^c quand il n'y a pas d'ambiguïté sur E) le *complémentaire de A dans E*, *i.e.* l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A ; A^c est donc défini par l'équivalence : $x \in A^c \Longleftrightarrow x \notin A$. Dans le cas particulier où E est l'ensemble des *réels*, noté $\mathbb{R}$, on écrira $\mathbb{R}^*$ au lieu de $\mathbb{R} - \{0\}$ ou $\{0\}^c$. Si B est une autre partie de E, $B - A$ désigne l'ensemble des points de B qui ne sont pas dans A (c'est le complémentaire de A dans B ; c'est donc l'ensemble $B \cap A^c$ où A^c est le complémentaire de A dans E — voir 0.1.2 ci-dessous pour l'intersection) ; de plus, on a l'équivalence : $A \subset B \Longleftrightarrow B^c \subset A^c$. Enfin, l'ensemble des parties de l'ensemble E sera noté $\mathcal{P}(E)$.

0.1.2 La *réunion* $E \cup F$ (resp. l'*intersection* $E \cap F$), des ensembles E et F, est l'ensemble des éléments qui sont dans E ou dans F (resp. qui sont dans E et dans F, *i.e.* qui sont communs à E et F). On dit que E et F sont *disjoints* lorsqu'ils sont d'intersection vide. On généralise ces notions à la famille d'ensembles $(E_i)_{i\in I}$, lorsque I est un ensemble d'indices non vide : la réunion $\bigcup_{i\in I} E_i$ (resp. l'intersection $\bigcap_{i\in I} E_i$) des E_i est l'ensemble des éléments qui sont dans l'un des E_i (resp. dans tous les E_i) ; ces ensembles seront notés $\bigcup_i E_i$ et $\bigcap_i E_i$ quand il n'y a pas d'ambiguïté sur I. Lorsque I est l'ensemble vide (noté $\emptyset$), la définition de la réunion se prolonge par $\bigcup_i E_i = \emptyset$.

Dans le cas où les E_i sont tous des parties de l'ensemble E, on dit que $(E_i)_{i\in I}$ est un *recouvrement* de E (ou que les E_i *recouvrent* E) lorsque $E = \bigcup_i E_i$. Si $(E_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de E tel que l'on ait $E_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$, et $E_i \cap E_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$ (*i.e.* les E_i sont 2 à 2 disjoints), on dit que c'est une *partition* de E.

Ces opérations ensemblistes vérifient les propriétés suivantes :

(1) Pour tout $j \in I$, on a les inclusions $\bigcap_i E_i \subset E_j \subset \bigcup_i E_i$. Si $E_i \subset F_i$ pour tout $i \in I$, alors $\bigcap_i E_i \subset \bigcap_i F_i$ et $\bigcup_i E_i \subset \bigcup_i F_i$.

(2) On a les équivalences : $E \subset \bigcap_i E_i$ ssi $E \subset E_i$ pour tout $i \in I$; de même, $\bigcup_i E_i \subset E$ ssi $E_i \subset E$ pour tout $i \in I$.

(3) On a les formules : $E \cap (\bigcup_i E_i) = \bigcup_i (E \cap E_i)$ et $E \cup (\bigcap_i E_i) = \bigcap_i (E \cup E_i)$; et, si les E_i sont tous inclus dans E, $(\bigcup_i E_i)^c = \bigcap_i E_i^c$ et $(\bigcap_i E_i)^c = \bigcup_i E_i^c$ (tous les complémentaires étant pris dans E).

Soit A une partie de E ; on appelle *fonction caractéristique* de A l'application $1_A : E \longrightarrow \mathbf{2}$ définie par $1_A(x) = 1$ ou 0, selon que $x \in A$ ou non (où $\mathbf{2} = \{0, 1\}$). On a les formules : $1_{A^c} = 1 - 1_A$, $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$ (donc $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B$, lorsque A et B sont disjointes). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ayant au moins deux éléments, $a_0, \ldots, a_n$ des éléments de I vérifiant $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$, $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des réels, et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui s'écrit $\varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i 1_{[a_i, a_{i+1}[}$; une telle fonction s'appelle une *fonction en escalier sur I* (cette fonction vaut, pour tout $i = 0, \ldots, n-1$, λ_i sur l'intervalle $[a_i, a_{i+1}[$, et 0 hors de ces intervalles).

0.1.3 Le *produit* $E \times F$ de E et F est l'ensemble dont les éléments sont les *couples* (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$. On généralise cette notion à la famille d'ensembles $(E_i)_{i \in I}$: le produit $\Pi_{i \in I} E_i$ de ces E_i est l'ensemble dont les éléments sont les *familles* $(x_i)_{i \in I}$ où $x_i \in E_i$ pour tout $i \in I$ (on identifie parfois abusivement la famille $(x_i)_{i \in I}$ à l'ensemble $\{x_i \mid i \in I\}$). $\Pi_{i \in I} E_i$ et $(x_i)_{i \in I}$ seront notés respectivement $\Pi_i E_i$ et (x_i) quand il n'y a pas d'ambiguïté sur I.

Axiome du choix : Tout produit d'ensembles non vides, indexé par un ensemble lui-aussi non vide, est non vide.

Dans le cas où les E_i sont tous égaux à E, on note E^I l'ensemble produit $\Pi_{i \in I} E_i$ (ses éléments sont donc les familles $(x_i)_{i \in I}$ où $x_i \in E$ pour tout $i \in I$). On note $E^2 = E \times E$, $E^n = \overbrace{E \times \cdots \times E}^{n \text{ fois}}$, si $n \in \mathbb{N}$ (où $\mathbb{N}$ est l'ensemble des *entiers positifs*) ; un élément de E^n est appelé un *n-uplet* (un 2-uplet est donc un couple).

On appelle *suite* d'éléments d'un ensemble E, une famille $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E, indexée par $\mathbb{N}$ (*i.e.* un élément de $E^{\mathbb{N}}$), que l'on note plus simplement (x_n) quand on a déjà précisé qu'il s'agit d'une suite. On note $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des éléments de la suite (x_n) : c'est une partie de E (alors que la suite (x_n) est un élément de $E^{\mathbb{N}}$). Une suite (x_n) est dite *stationnaire* si elle est constante à partir d'un certain rang. Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, on note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites de réels qui sont nulles à partir d'un certain rang.

La donnée d'une famille $(x_i)_{i \in I}$ dans un ensemble E équivaut à celle de l'application $f : I \longrightarrow E$ définie par $f(i) = x_i$ (lorsque $I = \mathbb{N}$, $f(n)$ désigne le $n + 1^{ème}$ élément de la suite (x_n) ; l'ensemble $S = \{(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est alors l'image $f(\mathbb{N})$ de $\mathbb{N}$ par f : voir 0.1.7 ci-dessous). On dira que la famille $(x_i)_{i \in I}$ *est définie par l'application* f correspondante.

Soit (x_n) une suite de réels et $x \in \mathbb{R}$; on dit que la suite (x_n) *converge vers* x *quand* $n \longrightarrow +\infty$, ce que l'on écrit $x_n \longrightarrow_{n \to +\infty} x$, si elle vérifie l'énoncé suivant :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq N \qquad |x_n - x| < \varepsilon.$$

Quand un tel réel x existe, il est unique, c'est pourquoi, on dit alors aussi que x est *la limite de la suite* (x_n), et on le note $x = \lim_{n \to +\infty} x_n$. On peut omettre

partout $n \to +\infty$ quand il n'y a pas d'ambiguïté et écrire simplement $x_n \longrightarrow x$ et $x = \lim x_n$. Enfin, on dit que la suite (x_n) *converge vers* $+\infty$ *quand* $n \longrightarrow +\infty$, ce que l'on écrit $x_n \longrightarrow_{n\to+\infty} +\infty$, ou $x_n \longrightarrow +\infty$, ou encore $+\infty = \lim x_n$, si elle vérifie l'énoncé suivant : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \varepsilon < x_n$. On a un énoncé analogue pour les suites de réels qui convergent vers $-\infty$.

0.1.4 Une *relation d'équivalence* sur l'ensemble E est une partie $\mathcal{R}$ du produit $E \times E$ ayant les propriétés suivantes : pour tout $x, y, z \in E$, on a : $(x, x) \in \mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ est *réflexive*) ; $(x, y) \in \mathcal{R} \iff (y, x) \in \mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ est *symétrique*) ; $(x, y) \in \mathcal{R}$ et $(y, z) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ est *transitive*). Lorsque $(x, y) \in \mathcal{R}$, on dit que x et y sont *$\mathcal{R}$-équivalents* (ou *équivalents modulo* $\mathcal{R}$), ce que l'on écrit $x \sim y \quad mod(\mathcal{R})$. La classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$ est l'ensemble $C_x = \{y \in E \mid x \sim y \ mod(\mathcal{R})\}$; ces classes d'équivalences forment une partition de E, et l'on note $E/\mathcal{R}$ l'ensemble dont les éléments sont ces classes ; cet ensemble $E/\mathcal{R}$ est appelé l'ensemble *quotient* de E par la relation $\mathcal{R}$ (dans un tel quotient, tous les éléments d'une même classe d'équivalence sont identifiés). Par exemple, si $\mathcal{R}_2$ est la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ définie par : $x \sim y \quad mod(\mathcal{R}_2) \iff \exists \lambda \neq 0 \quad y = \lambda x$, alors l'ensemble $\mathbb{R}/\mathcal{R}_2$ possède deux éléments : les classes d'équivalences $C_0 = \{0\}$ et $C_1 = \mathbb{R}^*$ (dans ce quotient, on a identifié entre eux tous les réels non nuls).

0.1.5 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application ; on note $Gr(f) = \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$ le *graphe* de f. Si A est une partie de E, la *restriction* de f à A est l'application $A \longrightarrow F : x \mapsto f(x)$ (que l'on note encore f ou bien $f|_A$).

On dit que f est *injective* (ou que f est une *injection*) si, pour tout $x, x' \in E$, elle vérifie l'implication : $f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$ (qui équivaut à : $x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$). Par exemple, si A est une partie de E, l'application $j_A : A \longrightarrow E : x \mapsto x$ est une injection que l'on appelle l'*injection canonique* de A dans E (c'est la restriction à A de l'identité $id_E : E \longrightarrow E : x \mapsto x$, notée id lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur E).

On dit que f est *surjective* (ou que f est une *surjection*) si, pour tout $y \in F$, il existe un $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Par exemple, si les ensembles E_i sont tous non vides, les applications $\pi_i : \Pi_i E_i \longrightarrow E_i : (x_i) \mapsto x_i$ sont des surjections appelées *projections canoniques* de $\Pi_i E_i$ sur les E_i (on a utilisé ici l'axiome du choix de 0.1.3) ; si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E, l'application $q : E \longrightarrow E/\mathcal{R} : x \mapsto C_x$ est une surjection appelée *surjection canonique* de E sur $E/\mathcal{R}$.

On dit que f est *bijective* (ou que f est une *bijection*) si elle est injective et surjective (*i.e.* si, pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$). Le fait que f est bijective équivaut au fait que f possède un inverse, noté f^{-1} (c'est l'unique application $g : F \longrightarrow E$ vérifiant $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$). Par exemple, alors que la projection canonique $\pi_1 : E \times F \longrightarrow E : (x, y) \mapsto x$ n'est pas une bijection en général (elle l'est ssi F est réduit à un point), sa restriction p à $Gr(f)$ (où $f : E \longrightarrow F$ est ici une application quelconque) en est une (son inverse étant $p^{-1}(x) = (x, f(x))$) ; l'application $\varphi : \mathbb{R}/\mathcal{R}_2 \longrightarrow \mathbf{2}$ (où $\mathcal{R}_2$ est la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ définie dans 0.1.4, et $\mathbf{2} = \{0, 1\}$), définie par $\varphi(\{0\}) = 0$ et $\varphi(\mathbb{R}^*) = 1$, est une bijection.

Rappelons que, si E et F sont des ensembles finis de même cardinal (voir 0.1.6 ci-dessous), on a les équivalences : u injective $\iff$ u surjective $\iff$ u bijective.

0.1.6 Le *cardinal* d'un ensemble fini est le nombre de ses éléments ; par exemple, l'ensemble $\mathsf{n} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \leq n - 1\} = \{0, 1, \ldots, n - 1\}$ possédant n éléments,

son cardinal est n. Deux ensembles finis ont même cardinal ssi il existe une bijection entre ces deux ensembles (ainsi, tout ensemble de cardinal n est en bijection avec l'ensemble n ; on en a donné un exemple, ci-dessus en fin de 0.1.5, avec $\mathsf{n} = \mathbf{2}$).

S'inspirant de ceci, on dit que deux ensembles quelconques E et F ont *même cardinal* (ou qu'ils sont *équipotents*) s'il existe une bijection $f : E \longrightarrow F$. On notera $E \leftrightarrow F$ lorsque les ensembles E et F sont équipotents (la relation $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence qui est très grossière, comparée à la relation d'homéomorphie, notée $\simeq$, que l'on rencontrera dans 2.3.6 — voir des exemples dans 4.3.3, 4.4.6, 5.1.15, 5.1.19, 9.3.21, 9.3.23 et 9.3.24). La notation $E \leftrightarrow F$ présente l'avantage de symboliser (voire de matérialiser) le fait que l'on dispose d'une bijection entre E et F. Par exemple (voir 0.1.3 ci-dessus), l'ensemble E^I des familles $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un ensemble E est équipotent à l'ensemble $\mathcal{F}(I, E)$ des applications $f : I \longrightarrow E$. En particulier, l'ensemble $\mathbf{2}^E$ (des familles de 0 et de 1, indexées par E, puisque $\mathbf{2} = \{0, 1\}$) est équipotent à l'ensemble $\mathcal{F}(E, \mathbf{2})$, lui-même équipotent à l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E (en considérant la bijection $\varphi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{F}(E, \mathbf{2}) : A \mapsto 1_A$, où 1_A est la fonction caractéristique de A (voir 0.1.2 ci-dessus)).

Plus généralement, on notera $E \preceq F$ lorsqu'il existe une injection $j : E \longrightarrow F$, et $E \prec F$ lorsque $E \preceq F$ et $E \not\leftrightarrow F$. Cette relation $\preceq$ n'est pas une relation d'ordre (voir 0.2.1 ci-dessous) : en effet, $E \preceq F$ et $E \succeq F \not\Rightarrow E = F$; on a cependant le théorème de Cantor-Bernstein ci-dessous :

Théorème de Cantor-Bernstein : $E \leftrightarrow F \Longleftrightarrow E \preceq F$ et $E \succeq F$ (*i.e.* ssi il existe une injection $E \to F$ et une injection $F \to E$).

Théorème de Cantor : Pour tout ensemble E, les ensembles E et $\mathbf{2}^E$ ne sont pas équipotents : on a $E \prec \mathbf{2}^E$, mais on n'a jamais $\mathbf{2}^E \preceq E$.

Un ensemble est dit *infini dénombrable* s'il est équipotent à $\mathbb{N}$; c'est le cas de $\mathbb{Z}$ (l'ensemble des *entiers relatifs*), de $\mathbb{Q}$ (l'ensemble des *rationnels*), de $\mathbb{N}^n$, de $\mathbb{Z}^n$, de $\mathbb{Q}^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, ...de $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$, de $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$, de $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ ...etc (voir 0.1.3 ci-dessus pour la notation). On dira d'un ensemble E qu'il est *dénombrable* s'il est au plus infini dénombrable (*i.e.* s'il est fini ou infini dénombrable, *i.e.* s'il vérifie $E \preceq \mathbb{N}$). Rappelons que les ensembles dénombrables sont stables par sous-ensembles, intersections, réunions dénombrables et produits finis.

D'après le théorème de Cantor, il existe des ensembles non dénombrables (*i.e.* infinis non dénombrables) ; par exemple $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ qui est équipotent à $\mathbb{R}$; tout ensemble équipotent à $\mathbb{R}$ est dit avoir la *puissance du continu* : c'est le cas de tout intervalle de $\mathbb{R}$ ayant au moins deux éléments distincts (voir 0.2.5 ci-dessous), de $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (l'ensemble des *irrationnels*), de tout $\mathbb{R}^n$ où $n \in \mathbb{N}$; les ensembles $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ ont aussi la puissance du continu ...il en est de même de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Par contre, $\mathbf{2}^{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont des ensembles infinis dont le cardinal est strictement supérieur à la puissance du continu.

0.1.7 Soit A et B deux parties de E et F respectivement et $f : E \longrightarrow F$ une application. On note $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A \quad y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\}$ *l'image directe* (ou, plus rapidement, *l'image*) de A par f, et $\overset{-1}{f}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$ *l'image réciproque* (ou *l'image inverse*) de B par f. Par exemple, si f est la fonction caractéristique $1_A : E \longrightarrow \mathbf{2}$ de A (voir 0.1.2 ci-dessus), alors $\overset{-1}{f}(\{1\}) = A$ et $\overset{-1}{f}(\{0\}) = A^c$; si f est l'injection canonique $j_A : A \longrightarrow E$ de A,

alors $\overset{-1}{f}(B) = A \cap B$ (B étant ici une autre partie de E) ; si f est la projection canonique $\pi_1 : E \times F \longrightarrow E$, alors $\overset{-1}{f}(A) = A \times F$; si f est la surjection canonique $q : E \longrightarrow E/\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E, alors $\overset{-1}{f}(B) = \bigcup_{C \in B} C$, où B est ici une partie de $E/\mathcal{R}$ (*i.e.* un ensemble de classes d'équivalences). Se reporter à 0.1.5 ci-dessus pour les applications considérées ici.

Dans le cas où $A = E$, on dit aussi que $f(E)$ est l'image de f ; on remarque que f est surjective ssi $f(E) = F$, et que, si f est injective, on a $f(E) \leftrightarrow E$ (la réciproque est fausse : considérer la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[: x \mapsto x^2$, qui est non injective alors que $[0, +\infty[\leftrightarrow \mathbb{R}$ (voir 0.2.5 ci-dessous)) ; on retrouve que $E \leftrightarrow F$ lorsque f est bijective.

Attention, l'image réciproque $\overset{-1}{f}(B)$ de B par f existe toujours, même si f n'est pas bijective. Dans le cas où f est bijective, $f^{-1}(B)$ désigne l'image directe de B par l'inverse $f^{-1} : F \longrightarrow E$; dans ce cas, on a bien sûr $f^{-1}(B) = \overset{-1}{f}(B)$; en particulier, on a $\{f^{-1}(y)\} = \overset{-1}{f}(\{y\})$ pour $y \in F$.

En fait, les opérateurs "image directe" et "image réciproque" sont respectivement les applications $\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(F) : A \mapsto f(A)$ et $\mathcal{P}(F) \longrightarrow \mathcal{P}(E) : B \mapsto \overset{-1}{f}(B)$, la première étant une "extension aux parties" de l'application $f : E \longrightarrow F$.

On a les inclusions $A \subset \overset{-1}{f}(f(A))$ et $f(\overset{-1}{f}(B)) \subset B$, qui deviennent des égalités lorsque f est bijective (plus précisément, il suffit que f soit injective pour que la première soit une égalité et que f soit surjective pour que la seconde en soit une). Si $A \subset A'$ et $B \subset B'$, on a les inclusions : $f(A) \subset f(A')$ et $\overset{-1}{f}(B) \subset \overset{-1}{f}(B')$.

Rappelons que, bien que l'image réciproque commute à toutes les opérations ensemblistes (unions, intersections et complémentaires), l'image directe, elle, ne commute qu'aux réunions (on a l'inclusion $f(\bigcap_i A_i) \subset \bigcap_i f(A_i)$, mais pas toujours l'inclusion inverse : considérer $A =]-\infty, 0[$, $B =]0, +\infty[$ et $f(x) = x^2$; de plus, si D est la droite $\mathbb{R} \times \{1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$ et $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$ la première projection, alors $\pi_1(\mathbb{R}^2 - D) = \mathbb{R} \neq \emptyset = \mathbb{R} - \pi_1(D)$).

Bien sûr, si f est bijective, elle commute aussi aux intersections et aux complémentaires (on peut vérifier facilement que f est injective ssi elle commute aux intersections (elle vérifie alors $f(A^c) \subset (f(A))^c$), et que f est surjective ssi elle vérifie $(f(A))^c \subset f(A^c)$).

2. Ensembles ordonnés

0.2.1 On dit qu'un ensemble E est *ordonné* s'il est muni d'une *relation d'ordre*, notée $x \leq y$ (lorsque l'on a $x \leq y$, on dit que x est *inférieur* à y ou, symétriquement, que y est *supérieur* à x). Une relation d'ordre sur E est en fait la donnée d'une partie $\mathcal{R}$ de $E \times E$ qui vérifie pour tout $x, y, z \in E$ (en écrivant $x \leq y$ pour $(x, y) \in \mathcal{R}$) : $x \leq x$; $x \leq y$ et $y \leq x \Longrightarrow x = y$; $x \leq y$ et $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$. Une relation d'ordre est donc réflexive, antisymétrique et transitive. On notera $x < y$ pour $x \leq y$ et $x \neq y$ (lorsque l'on a $x < y$, on dit que x est *strictement inférieur* à y ou, symétriquement, que y est *strictement supérieur* à x).

Exemples : Sur l'ensemble $\mathbb{R}$ (ainsi que sur toutes ses parties ; par exemple, sur les ensembles d'entiers $\mathbf{n}$ cités dans 0.1.6 ci-dessus), on ne considérera (dans cet ouvrage) que l'ordre usuel bien connu. On prolonge naturellement cet ordre de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ en posant $-\infty < x < +\infty$ pour tout x de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$, des parties d'un ensemble E, est un ensemble ordonné par la relation d'inclusion. Si E est un ensemble et F un ensemble ordonné, l'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$ des applications $E \longrightarrow F$ est ordonné par la relation $f \leq g$ ssi $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in E$; dans le cas particulier où A et B sont des parties de E et $F = \mathbf{2}$, on a l'équivalence : $A \subset B \Longleftrightarrow 1_A \leq 1_B$.

On dit que l'ensemble E est *totalement ordonné* s'il est ordonné et s'il vérifie la propriété suivante : pour tout $x, y \in E$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$. Parmi les ensembles ordonnés ci-dessus, $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$ (ainsi que toutes leurs parties pour l'ordre induit) sont totalement ordonnés ; les autres, hormis des cas triviaux, ne le sont pas.

Les applications qui respectent les relations d'ordre sont les application croissantes : plus précisément, soit $f : E \longrightarrow F$ une application, où E et F sont des ensembles ordonnés ; on dit que f est *croissante* (resp. *décroissante*) si, pour tout $x, y \in E$, on a l'implication : $x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp. $x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$). f est dite *strictement croissante* (resp. *strictement décroissante*) si les inégalités précédentes sont remplacées par des inégalités strictes.

Si E et F sont des ensembles totalement ordonnés et $f : E \longrightarrow F$ est une bijection croissante, son inverse est encore croissante (en effet, si $x, y \in E$ vérifiaient $x < y$ et $f^{-1}(x) > f^{-1}(y)$, alors, en appliquant f à la seconde inégalité, on obtiendrait $x > y$). Cela n'est plus vrai si l'ordre n'est pas total : considérer par exemple $E = \mathcal{P}(\mathbf{2})$ (ordonné par l'inclusion, avec $\mathbf{2} = \{0, 1\}$), $F = \mathbf{4} = \{0, 1, 2, 3\}$ (muni de son ordre usuel) et $f : E \longrightarrow F$ définie par $f(\emptyset) = 0$, $f(\{0\}) = 1$, $f(\{1\}) = 2$ et $f(\mathbf{2}) = 3$.

Une suite (x_n) de réels est dite *croissante* (resp. *décroissante*) si l'application f qui la définit (voir 0.1.3) est croissante (resp. décroissante).

Soit (x_n) une suite de points dans un ensemble E. Une *sous-suite* (ou *suite extraite*) de la suite (x_n) est une suite $(x_{\varphi(k)})$, où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante (si l'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$ définit la suite (x_n), la sous-suite $(x_{\varphi(k)})$ est définie par l'application $f \circ \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow E$). En fait, la donnée d'une telle application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ étant elle-même équivalente à la donnée d'une suite strictement croissante d'entiers (n_k) avec $\varphi(k) = n_k$, une telle sous-suite s'écrit aussi : (x_{n_k}) (plus précisément $(x_{n_k})_k$, puisque c'est l'indice k qui varie). On remarque que, pour tout entier k, on a $k \leq n_k$ (puisque la suite (n_k) croît strictement), de sorte que la suite (n_k) tend vers $+\infty$ (lorsque k tend vers $+\infty$).

Par transitivité, toute sous-suite d'une sous-suite (d'une suite donnée) est une sous-suite (de ladite suite) : reprenant les notations ci-dessus, cela résulte du fait que $(f\circ\varphi)\circ\psi = f\circ(\varphi\circ\psi)$, sachant que le composé de deux applications strictement croissantes est strictement croissant.

0.2.2 Soit E un ensemble ordonné, A un partie de E et x un élément de E.

On dit que x est un *majorant* (resp. *un minorant*) de A s'il vérifie $a \leq x$ (resp. $x \leq a$) pour tout $a \in A$. On dit que A est *majorée* (resp. *minorée*) si elle possède un majorant (resp. un minorant), et qu'elle est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée. Ainsi, pour l'ordre usuel, une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée (dans $\mathbb{R}$) s'il

existe un réel $\alpha > 0$ vérifiant $|a| \leq \alpha$ pour tout $a \in A$; c'est le cas par exemple des intervalles bornés $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ (*i.e.* pour lesquels a et b ne sont pas infinis (voir 0.2.5 ci-dessous)), de $\mathbb{Q} \cap]a, b[= \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x < b\}$ (car il est inclus dans $]a, b[$ qui l'est) ; par contre, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ne le sont pas (ni l'ensemble des entiers pairs (resp. impairs)). Par contre, toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ est bornée (dans $\overline{\mathbb{R}}$) par les infinis !

On dit qu'un ensemble ordonné E est *inductif* si toute partie totalement ordonnée de E est majorée. En se référant à 0.2.1 ci-dessus avec les ordres naturels considérés, les ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ne sont pas inductifs ; ni l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: considérer la partie $A = \{f_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid n \in \mathbb{N}\}$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est la fonction constante sur n. Par contre l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E est inductif (tout ensemble de parties de E étant majoré par E lui-même) ; voir un autre exemple d'ensemble ordonné inductif dans 8.3.2.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, où E est un ensemble et F un ensemble ordonné ; on dit que f est *majorée* (resp. *minorée*, *bornée*) si son image $f(E)$ est majorée (resp. minorée, bornée) dans F.

Une suite (x_n) de réels est dite *majorée* (resp. *minorée, bornée*) si l'application qui la définit est majorée (resp. minorée, bornée).

0.2.3 Soit E un ensemble ordonné, A une partie de E et x un élément de A.

On dit que x est un *maximum* (resp. un *minimum*) de A s'il majore (resp. minore) tous les éléments de A, *i.e.* si c'est *le plus grand élément* (resp. *le plus petit élément*) de A ; ces éléments sont uniques, quand ils existent.

Ces éléments n'existent pas toujours : prendre $A = E = \mathbb{R}$; ou bien considérer, dans l'ensemble (ordonné par l'inclusion) $\mathcal{P}(E)$ (où E est un ensemble ayant au moins deux éléments distincts), la partie $A = \mathcal{P}(E) - \{E\}$.

Par définition, toute partie qui possède un maximum (resp. un minimum) est obligatoirement non vide et majorée (resp. et minorée) par cet élément ; en particulier, toute partie qui possède un maximum et un minimum est non vide et bornée (l'inverse est faux : considérer, dans $\mathbb{R}$, l'intervalle borné $]a, b[$).

En fait, dans $\mathbb{Z}$, il suffit qu'une partie soit non vide et majorée (resp. et minorée) pour qu'elle possède un maximum (resp. un minimum) ; on retrouvera ce résultat dans un cadre topologique (voir 3.1.19). En particulier, toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Remarquons que, dans un ensemble totalement ordonné, toute partie non vide et finie admet un maximum et un minimum. Dans $\mathbb{R}$, les parties non vides et finies sont loin d'être les seules à avoir cette propriété : par exemple, tout intervalle fermé borné $[a, b]$ a un plus petit élément et un plus grand élément (on verra, dans 3.1.18 et 5.1.7 qu'il en est ainsi pour tout compact non vide de $\mathbb{R}$).

L'ensemble $\mathbb{Q} \cap]-\infty, \sqrt{2}] = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \sqrt{2}\}$ ne possède pas de maximum dans $\mathbb{Q}$ ($\sqrt{2}$ n'étant pas rationnel). Par contre, $\overline{\mathbb{R}}$ possède un maximum et un minimum : ses infinis.

On dit que x est *maximal* dans A s'il n'existe pas d'élément $a \in A$ vérifiant $x \leq a$ et $x \neq a$. En remplaçant $\leq$ par $\geq$, on obtient la notion d'élément *minimal* dans A. Ces éléments n'existent pas toujours (mais il peut y en avoir plusieurs) : il suffit de considérer, d'après ce qui suit, dans un ensemble totalement ordonné, un partie qui n'admet pas de plus grand ou de plus petit élément !

Par définition, tout maximum (resp. minimum) est maximal (resp. minimal) ; la réciproque est fausse : considérer, dans l'ensemble (ordonné par l'inclusion) $\mathcal{P}(E)$ (où E est un ensemble ayant au moins deux éléments distincts), la partie $A = \mathcal{P}(E) - \{E\}$; alors $E - \{x\}$ est un élément maximal de A, mais n'en est pas un maximum (puisqu'il ne majore pas $E - \{y\}$ où $y \neq x$). Par contre, dans un ensemble totalement ordonné, maximum=maximal (resp. minimum=minimal).

Lemme de Zorn : Tout ensemble ordonné inductif (voir 0.2.2 ci-dessus) admet un élément maximal (utilise l'axiome du choix — voir 0.1.3 ci-dessus).

Dans un ensemble ordonné inductif, tout élément est majoré par un élément maximal (car l'ensemble $\{y \mid y \geq x\}$ est inductif). D'après ce qui précède, cette propriété est fausse dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, $\mathbb{R}$ est *archimédien* (toujours pour l'ordre usuel), c'est-à-dire que tout réel est majoré par un entier.

0.2.4 Soit E un ensemble ordonné et A une partie non vide et majorée (resp. minorée) de E. Si A ne possède pas de maximum (resp. de minimum), on peut essayer de l'approcher supérieurement (resp. inférieurement) par le plus petit de ses majorants, appelé *borne supérieure* de A et noté $\sup A$ (resp. le plus grand de ses minorants, appelé *borne inférieure* de A et noté $\inf A$), lorsqu'il existe dans E (il est alors unique). Bien sûr, si A possède un maximum (resp. un minimum) cet élément coïncide avec la borne supérieure $\sup A$ (resp. la borne inférieure $\inf A$). Ces bornes n'existent pas toujours : considérer, dans $\mathbb{Q}$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \sqrt{2}\}$!

Par définition, si A est une partie non vide et majorée de E, sa borne supérieure (quand elle existe) est un élément μ de E entièrement caractérisé par les deux propriétés suivantes : $a \leq \mu$ pour tout $a \in A$ (*i.e.* μ est un majorant de A) et $\mu \leq \alpha$ pour tout majorant α de A (*i.e.* μ minore tous les majorants de A).

Les bornes supérieures et inférieures, quand elles existent, vérifient les propriétés suivantes :

(1) $\inf A \leq a \leq \sup A$ pour tout $a \in A$.

(2) On a les équivalences : $\alpha \leq \inf A \iff \alpha \leq a$ pour tout $a \in A$; $\sup A \leq \alpha \iff a \leq \alpha$ pour tout $a \in A$.

(3) Si $A \subset B$, on a les inégalités $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$

Attention, lorsque A est infini, les équivalences (2) ci-dessus sont fausses si l'on remplace les $\leq$ par des $<$ (par exemple $-1/n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors que $\sup_{n \in \mathbb{N}^*}(-1/n) = 0$) ; bien que l'on ait toujours l'implication $\sup A < \alpha \Longrightarrow \forall a \in A \quad a < \alpha$, on a seulement l'implication $\forall a \in A \quad a < \alpha \Longrightarrow \sup A \leq \alpha$ lorsque A est infini. En fait, les équivalences (2) sont vraies avec des $<$ si A est fini ...ou bien encore si A est un compact non vide de $\mathbb{R}$ — voir 3.1.18 et 5.1.7.

Dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E (muni de sa relation d'inclusion), tout ensemble non vide de parties possède une borne supérieure et une borne inférieure (respectivement la réunion et l'intersection de ces parties) ; d'ailleurs, on avait vu dans 0.1.2 ci-dessus que ces opérations ensemblistes vérifiaient les propriétés des bornes supérieures et inférieures rappelées ci-dessus.

Toute partie non vide A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ (pour l'ordre usuel) ; ces bornes sont dans $\mathbb{R}$ lorsque A est bornée dans $\mathbb{R}$ (plus précisément, $\sup A < +\infty$ lorsque A est majorée et $-\infty < \inf A$ lorsque A est minorée ; voir 3.1.24). Par contre, c'est faux dans $\mathbb{Q}$, comme on l'a déjà remarqué.

Dans $\mathbb{R}$, la borne supérieure μ d'une partie A non vide et majorée est caractérisée par les deux propriétés : $\forall a \in A \quad a \leq \mu$; $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \mu - \varepsilon < a$ (*i.e.* aucun des $\mu - \varepsilon$ ne peut être un majorant de A). On obtient la caractérisation des bornes inférieures (pour une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée) en "retournant" toutes les inégalités et en remplaçant $-$ par $+$.

D'après ce qui précède, une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée (ici E est un ensemble quelconque) ssi son image $f(E)$ est bornée dans $\mathbb{R}$, *i.e.* ssi elle vérifie $\sup_{x \in E} |f(x)| < +\infty$.

Proposition : Soit (x_n) une suite de points d'un ensemble E et A une partie de E telle que l'ensemble $X_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in A\}$ soit infini. Alors la suite (x_n) possède une sous-suite dont tous les termes sont dans A.

Preuve : On considère la suite d'entiers (n_k) définie par la récurrence suivante : $n_0 = \inf X_0$ et $n_{k+1} = \inf X_{k+1}$, où $X_{k+1} = \{p \in \mathbb{N} \mid p > n_k \text{ et } x_p \in A\}$ (n_k est la $k+1^{\grave{e}me}$ fois que la suite (x_n) "passe" dans A). Chacun des X_k étant une partie de $\mathbb{N}$, minorée (par 0) et non vide (car X_0 est infini : pour tout entier n, il existe donc un entier $p > n$ tel que $x_p \in A$), elle admet un plus petit élément (voir 0.2.3 ci-dessus) : sa borne inférieure (on a $n_k = \inf X_k \in X_k$), si bien que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, n_k est un entier vérifiant $n_k < n_{k+1}$; par suite, (n_k) est une suite strictement croissante d'entiers, et la suite (x_{n_k}) est une sous-suite de la suite (x_n), dont les termes sont tous dans A (par définition même des entiers n_k). □

Remarquons que la sous-suite construite dans la preuve ci-dessus est formée de tous les x_n qui sont dans A, ordonnés selon leur ordre d'entrée dans A : on l'appelle la *trace sur* A de la suite (x_n) ; évidemment toute sous-suite de cette trace sur A répond aussi à la question.

L'hypothèse faite sur la partie A est tout à fait naturelle : en effet, pour toute suite (x_n) dans E, l'une des parties $X_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in A\}$ ou $Y_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in A^c\}$ est infinie (puisque $X_0 \cup Y_0 = \mathbb{N}$ qui est infini dénombrable) ; la suite (x_n) possède donc une sous-suite dans A ou dans son complémentaire A^c.

0.2.5 Ici, comme dans tout cet ouvrage, $\mathbb{R}$ est muni de son ordre total usuel.

On appelle *intervalle* de $\mathbb{R}$ une partie I de $\mathbb{R}$ qui a la propriété suivante : $x, y \in I$ et $x \leq c \leq y \Longrightarrow c \in I$ ($\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont donc des intervalles). Lorsque I est non vide, ses bornes $a = \inf I$ et $b = \sup I$, qui sont des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ (elles vérifient $a \leq b$; et elles sont toutes deux finies, *i.e.* dans $\mathbb{R}$, ssi l'intervalle I est borné dans $\mathbb{R}$ — voir 0.2.3 ci-dessus), sont les *extrémités* (gauche et droite) de I. L'intervalle I peut être de la forme suivante : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (qui est réduit au singleton $\{a\}$ lorsque $a = b$), $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ ou $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (ces trois derniers étant vides lorsque $a = b$), selon que a ou b sont dans I ou non (chaque extrémité fermée étant dans I, donc finie) ; a est le plus petit élément de I pour les deux premiers alors que b est le plus gand élément de I pour le premier et le troisième (le dernier n'a ni plus petit ni plus grand élément). Remarquons que parmi tous ces intervalles, seuls ceux de la forme $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$, $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$, $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$, $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), et $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ sont non bornés dans $\mathbb{R}$.

Soit $a \leq b$; on dit que $]a, b[$ (avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$) est un *intervalle ouvert* de $\mathbb{R}$; et que $\emptyset$, $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ et $\mathbb{R}$ sont des *intervalles fermés* de $\mathbb{R}$ (avec ici $a, b \in \mathbb{R}$) ; $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont donc des intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont à la fois ouverts et fermés

dans $\mathbb{R}$.

On appelle *intérieur d'un intervalle I dans* $\mathbb{R}$ et on le note $\overset{\circ}{I}$, l'intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ qui a les mêmes extrémités que I, en convenant que l'intérieur de $\emptyset$ dans $\mathbb{R}$ est vide (un intervalle est ouvert ssi cet intervalle est égal à son intérieur) ; ainsi, si a et b sont des réels vérifiant $a \leq b$, $]a,b[$ est l'intérieur, dans $\mathbb{R}$, de $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$ et $[a,b]$ (donc $\emptyset$ est l'intérieur, dans $\mathbb{R}$, de $\{a\}$), alors que $]a,+\infty[$ est l'intérieur, dans $\mathbb{R}$, de $[a,+\infty[$. De la même façon, on parle de la *fermeture d'un intervalle I dans* $\mathbb{R}$, que l'on note $\bar{I}$: c'est l'intervalle fermé de $\mathbb{R}$ qui a les mêmes extrémités que I, en convenant que la fermeture de $\emptyset$ dans $\mathbb{R}$ est vide (un intervalle est fermé ssi cet intervalle est égal à sa fermeture) ; ainsi, si a et b sont des réels vérifiant $a < b$, $[a,b]$ est la fermeture, dans $\mathbb{R}$, de $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$ et $[a,b]$, alors que $[a,+\infty[$ est la fermeture, dans $\mathbb{R}$, de $]a,+\infty[$. Signalons que, puisque $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ qui est à la fois ouvert et fermé dans $\mathbb{R}$, il est égal à son intérieur et à sa fermeture dans $\mathbb{R}$. Nous reprendrons tout ceci dans un cadre topologique, au chapitre III.

On peut aussi parler d'intervalles dans l'ensemble ordonné $\overline{\mathbb{R}}$ (voir 0.2.1) en n'exigeant plus que les extrémités fermées soient finies : on doit donc (en se conformant à la définition donnée plus haut dans le cas des intervalles de $\mathbb{R}$) rajouter à tous ceux de $\mathbb{R}$, lorsque $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, les intervalles de la forme $]a,+\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x\}$, $[-\infty,b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x < b\}$, (en particulier, on obtient les intervalles $]-\infty,+\infty]$ et $[-\infty,+\infty[$, respectivement pour $a = -\infty$ et $b = +\infty$) ; ainsi que ceux de la forme $[a,+\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x\}$, $[-\infty,b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x \leq b\}$ (en particulier, on obtient $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty]$ pour $a = -\infty$ ou $b = +\infty$). On généralise alors tout ce qui précède à de tels intervalles : les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ qui sont ouverts dans $\overline{\mathbb{R}}$ sont tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ (*i.e.* de la forme $]a,b[$, où $a,b \in \mathbb{R}$ vérifient $a \leq b$), auxquels il faut rajouter les intervalles de la forme $]a,+\infty]$, $[-\infty,b[$ (avec $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$) et $\overline{\mathbb{R}}$; les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ qui sont fermés dans $\overline{\mathbb{R}}$ sont $\emptyset$ ainsi que tous les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ de la forme $[a,b]$, où $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ vérifient $a \leq b$ (on doit donc rajouter aux intervalles fermés de $\mathbb{R}$ qui sont bornés dans $\mathbb{R}$, ceux de la forme $[a,+\infty]$, $[-\infty,b]$ (avec $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$), y compris donc $\overline{\mathbb{R}}$). Il peut sembler paradoxal, que, d'une part, lorsque $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, les intervalles de la forme $]a,+\infty]$, $[-\infty,b[$ et $\overline{\mathbb{R}}$ soient des ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$; et que, d'autre part, lorsque $a,b \in \mathbb{R}$, les intervalles de la forme $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$ et $\mathbb{R}$ soient fermés dans $\mathbb{R}$, alors qu'ils ne le sont pas dans $\overline{\mathbb{R}}$; en fait tout ceci s'éclairera dans le cadre topologique développé dans ce livre. Enfin, on peut parler d'intérieur et de fermeture, dans $\overline{\mathbb{R}}$, d'un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ (en se conformant encore à la définition donnée plus haut pour les intervalles de $\mathbb{R}$ ... bien sûr, en y remplaçant $\mathbb{R}$ par $\overline{\mathbb{R}}$) : l'intérieur, dans $\overline{\mathbb{R}}$, de tout intervalle de $\mathbb{R}$ est égal à son intérieur dans $\mathbb{R}$; mais, par exemple, l'intérieur, dans $\overline{\mathbb{R}}$, de $[a,+\infty]$ est $]a,+\infty]$. Par contre, si la fermeture, dans $\overline{\mathbb{R}}$, de tout intervalle borné dans $\mathbb{R}$ est encore égale à sa fermeture dans $\mathbb{R}$, pour les autres, on a par exemple : $[a,+\infty]$ est la fermeture, dans $\overline{\mathbb{R}}$, de $[a,+\infty[$, de $]a,+\infty[$ et de $]a,+\infty]$; $\overline{\mathbb{R}}$ est la fermeture, dans $\overline{\mathbb{R}}$, de $\mathbb{R}$. Mais restons-en là pour ces digressions sur lesquelles nous reviendrons en détail dans le chapitre III.

Rappelons que tous les intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ sont équipotents (voir 0.1.6) à $\mathbb{R}$, *i.e.* ont la puissance du continu. En effet, pour tout $a,b \in \mathbb{R}$ (avec $a < b$), on a $]a,b[\leftrightarrow]-1,1[$ (par la similitude, composée de la translation "$-(a+b)/2$" et de l'homothétie de rapport $2/(b-a)$) ; de plus, $\mathbb{R} \leftrightarrow]-\pi/2,\pi/2[$

(par la bijection Arctg). De même, on a $]-\infty, a[\leftrightarrow]-a,+\infty[$ (par la symétrie $s(x)=-x$), et $]a,+\infty[\leftrightarrow]0,+\infty[$ (par la translation "$-a$") ; enfin $]0,+\infty[\leftrightarrow \mathbb{R}$ par la bijection log.

En fait, grâce au théorème de Cantor-Bernstein (voir 0.1.6 ci-dessus), on peut prouver que tous les intervalles de $\mathbb{R}$, ayant au moins deux éléments différents, sont équipotents à $\mathbb{R}$. Par exemple, $\mathbb{R} \leftrightarrow [a,b]$ grâce aux injections $[a,b] \to \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \leftrightarrow]a,b[\to [a,b]$ (on peut remplacer l'intervalle $[a,b]$ par l'un des intervalles $[a,b[$ ou $]a,b]$) ; ou bien $[a,+\infty[\leftrightarrow \mathbb{R}$ grâce aux injections $[a,+\infty[\to \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \leftrightarrow]a,+\infty[\to [a,+\infty[$. On a aussi $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbf{S}^1$ (où $\mathbf{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ est le cercle unité, centré en l'origine, de $\mathbb{R}^2$; ce cercle sera noté $\mathbf{S}^1_2$ par la suite pour spécifier qu'il est défini à l'aide de la norme euclidienne) par les injections $\mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \leftrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \leftrightarrow [-\pi,\pi[\leftrightarrow \mathbf{S}^1$, où la dernière bijection est $\varepsilon(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta)$. On a déjà signalé dans 0.1.6 ci-dessus que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont équipotents.

Plus généralement, tout intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$, ayant au moins deux éléments différents, est équipotent à $\overline{\mathbb{R}}$. Par exemple, $\overline{\mathbb{R}} \leftrightarrow [-\pi/2,\pi/2]$ par la bijection Arctg, prolongée à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant $\mathrm{Arctg}(-\infty)=-\pi/2$ et $\mathrm{Arctg}(+\infty)=\pi/2$; de même, $[0,+\infty] \leftrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ par la bijection log prolongée à $[0,+\infty]$ en posant $\log 0 = -\infty$ et $\log(+\infty)=+\infty$. Une conséquence immédiate est que $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$ sont équipotents.

Bien sûr, aucun de ces intervalles n'est équipotent à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$, qui, eux, sont dénombrables. Signalons, pour terminer, le don d'ubiquité des rationnels (ce qui pourrait, à tort, paraître en contradiction avec le fait que les rationnels ne sont qu'en nombre dénombrable) et des irrationnels dans $\mathbb{R}$: il existe un rationnel et un irrationnel dans tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ (autrement dit, entre deux réels distincts, il existe un rationnel et un irrationnel) ; voir 3.1.7 où l'on traduit topologiquement cette propriété en disant que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^c$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et I un intervalle de $\mathbb{R}$; *a priori*, il n'y a aucune raison pour que les images directe et inverse de I par f soient des intervalles : considérer, par exemple, l'application $f(x)=0$ ou 1, selon que $x \le 0$ ou $x>0$ (alors $f(]-1,1[)=\{0,1\}$), ou l'application $g(x)=x^2$ (alors $\overset{-1}{g}(]1,4[)=]-2,-1[\cup]1,2[$) ; cependant :

Proposition : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une bijection croissante ; on a les égalités $f(]a,b[) \overset{\star}{=}]f(a),f(b)[$ et $\overset{-1}{f}(]a,b[) \overset{\star\star}{=}]f^{-1}(a),f^{-1}(b)[$, pour tous réels $a<b$.

<u>Preuve</u> : Rappelons que l'inverse d'une bijection croissante est aussi croissante (voir 0.2.1). On a donc l'équivalence $a<x<b \Longleftrightarrow f(a)<f(x)<f(b)$ (chacune des implications résultant respectivement de la croissance de f et de f^{-1}), d'où l'égalité $\overset{\star}{=}$. Pour obtenir l'égalité $\overset{\star\star}{=}$, il suffit de remplacer f par f^{-1}. □

Remarquons que les égalités $\overset{\star}{=}$ et $\overset{\star\star}{=}$ précédentes sont encore vraies pour toutes les sortes d'intervalles de $\mathbb{R}$, bornés ou non ; ceci, même pour une bijection croissante $I \longrightarrow J$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$; on peut remplacer partout "croissante" par "décroissante" (en intervertissant les bornes).

3. Algèbre linéaire

0.3.1 Un *groupe* est un ensemble G muni d'une opération $G \times G \longrightarrow G$ associative, avec élément neutre, et telle que tout élément de G possède un inverse ; lorsque cette opération est commutative, on dit que G est un *groupe commutatif*.

Un *anneau* est un ensemble A muni de deux opérations : une addition $A \times A \longrightarrow A : (x, y) \mapsto x + y$ (qui fait de A un groupe commutatif, on note 0 son élément neutre) et une multiplication $A \times A \longrightarrow A : (x, y) \mapsto xy$ qui est associative et distributive par rapport à l'addition ; lorsque cette multiplication est commutative, on dit que A est un *anneau commutatif.*

Un *corps* K est un anneau dont les éléments non nuls forment un groupe pour la multiplication (on note 1 l'élément neutre de la multiplication) ; dans cet ouvrage, on ne considérera que des *corps commutatifs* (*i.e.* dont la multiplication est commutative). Les éléments d'un corps seront appelés des *scalaires* et notés λ, μ, ...etc. Contrairement à l'anneau $\mathbb{Z}$, les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps (le dernier étant le corps des *complexes*) pour leurs opérations usuelles. L'anneau $\mathbb{R}[X]$, des *polynômes à coefficients réels*, n'est pas un corps ; il en est de même de l'anneau $M_n(\mathbb{R})$, des *matrices réelles* $n \times n$.

On dit que K' est un *sous-corps* d'un corps K si c'est une partie de K qui vérifie les conditions : $0, 1 \in K'$; $\lambda, \mu \in K' \Longrightarrow \lambda + \mu, \lambda\mu \in K'$; $\lambda \in K' - \{0\} \Longrightarrow 1/\lambda \in K'$. Ainsi $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ qui, lui-même, est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Rappelons que l'on peut définir sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ des opérations algébriques de façon que les propriétés des limites de suites de réels (vis-à-vis des opérations algébriques) restent valables : on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + (+\infty) = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty$, $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$; pour tout $x > 0$, $x \times (+\infty) = +\infty$, $x \times (-\infty) = -\infty$ (pour $x < 0$, on intervertit les signes dans le second membre des égalités précédentes) ; enfin $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$, $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$. Quant aux expressions $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \times (+\infty)$ et $0 \times (-\infty)$, elles sont non définies. Les opérations ainsi définies sur $\overline{\mathbb{R}}$ gardent les propriétés d'associativité, de commutativité et de distributivité. Le fait que les opérations de $\overline{\mathbb{R}}$ ne soient pas partout définies requiert une certaine vigilance dans leur emploi. En tout état de cause, elles ne font pas de $\overline{\mathbb{R}}$ un corps !

0.3.2 Soit K un corps ; un *K-espace vectoriel* est un ensemble E muni d'une addition (interne) $\sigma : E \times E \longrightarrow E : (x, y) \mapsto x + y$ (qui fait de E un groupe commutatif) et d'une multiplication (externe) $m : K \times E \longrightarrow E : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ vérifiant, pour tout $\lambda, \mu \in K$ et tout $x, y \in E$: $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$; $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$; $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$; $1x = x$ (on note par le même symbole 0 les éléments neutres de l'addition de K et de E, le contexte nous indiquant de façon implicite duquel il s'agit). Plus rapidement, on ne mentionne pas toujours le corps quand on sait duquel il s'agit (essentiellement, dans cet ouvrage, il s'agira de $\mathbb{R}$ ou, parfois, de $\mathbb{C}$) : on parlera alors d'*espace vectoriel.* Bien sûr, tout corps K est un K-espace vectoriel ...et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, K^n est un K-espace vectoriel ; plus généralement, si E est un K-espace vectoriel, E^n est un K-espace vectoriel (dont les opérations sont $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ et $\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$) ... L'anneau $\mathbb{R}[X]$ est aussi un espace vectoriel ; il en est de même de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, l'ensemble des *matrices réelles* $m \times n$.

Si K' est un sous-corps de K, tout K-espace vectoriel est un K'-espace vectoriel (en se limitant aux scalaires qui sont dans K'). Ainsi, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ est aussi un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ; le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Si A et B sont deux parties d'un K-espace vectoriel E, on note :
$A + B = \{x + y \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$, que l'on désigne par $A \oplus B$ lorsque $A \cap B = \{0\}$.

On dit que F est un *sous-espace vectoriel* d'un K-espace vectoriel E s'il vérifie

les conditions : $0 \in F$; $x, y \in F \Longrightarrow x+y \in F$; $(\lambda, x) \in K \times F \Longrightarrow \lambda x \in F$. Par exemple, l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des *polynômes à coefficients réels et de degré* $\leq n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. De même, $F \cap G$ et $F+G$ sont des sous-espaces vectoriels de E, si F et G sont eux-mêmes des sous-espaces vectoriels de E ; dans ce cas, on dit que F et G sont *supplémentaires* dans E si $E = F \oplus G$, *i.e.* si $E = F + G$ et $\{0\} = F \cap G$ (tout $x \in E$ se décompose alors de manière unique en la somme d'un élément de F et d'un élément de G, *i.e.* s'écrit de manière unique $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$).

On dit que x est une *combinaison linéaire* d'éléments d'une partie A d'un K-espace vectoriel E, s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$, des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ et des éléments $a_1, \ldots, a_n \in A$ qui vérifient $x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$; on dit alors que l'expression $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$ est une *décomposition* de x sur A.

Si A est une partie d'un K-espace vectoriel E, on appelle *sous-espace vectoriel engendré par* A, ce que l'on note $Vect(A)$, le plus petit des sous-espaces vectoriels de E contenant A (c'est l'intersection des sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A) ; $Vect(A)$ est donc formé des combinaisons linéaires d'éléments de A.

Les applications qui respectent les opérations des espaces vectoriels sont les applications linéaires : plus précisément, soit $u : E \longrightarrow F$, où E et F sont des K-espaces vectoriels ; on dit que u est *linéaire* si, pour tout $\lambda \in K$ et tout $x, y \in E$, elle vérifie : $u(x+y) = u(x) + u(y)$ et $u(\lambda x) = \lambda u(x)$; lorsque $F = K$, on dit que u est une *forme linéaire* sur E. On dit que $f : E \longrightarrow F$ est *affine* si, pour tout $x \in E$, on a $f(x) = a + u(x)$ (ce que l'on écrira $f = a + u$), où $a \in F$ et $u : E \longrightarrow F$ est linéaire. Une application linéaire bijective est appelée un *isomorphisme* (son inverse est aussi linéaire). Deux K-espaces vectoriels E et F pour lesquels il existe un isomorphisme $\varphi : E \longrightarrow F$ sont dits *isomorphes*. L'addition $\sigma : E \times E \longrightarrow E$ d'un espace vectoriel E est une application linéaire (par contre, la translation $\tau_a : E \longrightarrow E : x \mapsto x + a$ (où $a \in E$) ne l'est pas, elle est seulement affine) ; c'est aussi le cas des projections canoniques $\pi_i : \Pi_i E_i \longrightarrow E_i$, lorsque les E_i sont des espaces vectoriels (sur un même corps), des applications "trace" et "transposition" sur l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$.

Rappelons que, pour une application linéaire $u : E \longrightarrow F$ (E et F sont des K-espaces vectoriels), on note $Ker\, u = \overset{-1}{u}(\{0\})$ son *noyau* et $Im\, u$ son image $u(E)$ (voir 0.1.7 ci-dessus) ; ce sont des sous-espaces vectoriels de E et F respectivement, et l'on a les équivalences : u injective $\Longleftrightarrow Ker\, u = \{0\}$; u surjective $\Longleftrightarrow Im\, u = F$.

Si u est une application linéaire définie sur $E = F \oplus G$, où F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, alors u est entièrement déterminée par ses restrictions $u|_F$ et $u|_G$ à F et G.

Terminons ce paragraphe par la notion d'application bilinéaire : soit E, F et G trois K-espaces vectoriels et $B : E \times F \longrightarrow G$ une application ; on dit que B est *bilinéaire* si elle est linéaire en chacune de ses variables, *i.e.* si, d'une part, pour tout x fixé dans E, l'application $F \longrightarrow G : y \mapsto B(x, y)$ est linéaire, et d'autre part, pour tout y fixé dans F, l'application $E \longrightarrow G : x \mapsto B(x, y)$ est linéaire. Lorsque $E = F$, on dit que l'application bilinéaire B est *symétrique* si elle vérifie $B(x, y) = B(y, x)$ pour tout $x, y \in E$. Lorsque $G = K$, on dit que B est une *forme bilinéaire* ; si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, une forme bilinéaire $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *positive* (resp. *définie positive*) si elle vérifie $B(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$ (resp. $B(x, x) > 0$ pour tout $x \neq 0$). La multiplication externe $m : K \times E \longrightarrow E$ d'un K-espace vectoriel E est une application bilinéaire ; c'est aussi le cas de

l'application "déterminant" sur l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ (le déterminant est en fait n-linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$).

Rappelons pour finir qu'il y a une correspondance biunivoque entre les formes bilinéaires symétriques $B : E \times E \longrightarrow K$ et les formes quadratiques $q : E \longrightarrow K$ (voir DEUG). En effet, à tout B on associe q définie par $q(x) = B(x,x)$; et, inversement, à tout q on associe B définie par $B(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$.

0.3.3 Soit E un K-espace vectoriel et $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E (voir 0.1.3). On dit que cette famille est *libre* (ou *linéairement indépendante*) si, pour toute sous-famille finie $(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$, l'équation (en $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$) $\lambda_1 e_{i_1} + \cdots + \lambda_n e_{i_n} = 0$ admet $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ pour unique solution (dans ce cas, aucun des e_i n'est nul). On dit que cette famille est *génératrice* (ou qu'elle *engendre linéairement* E) si $E = Vect(\{e_i \mid i \in I\})$, *i.e.*, si tout $x \in E$ est une combinaison linéaire des e_i. On dit que cette famille est une *base* (ou K-base puisqu'elle dépend du corps K) de E si elle est libre et génératrice (c'est une famille libre maximale, ou, de façon équivalente, une famille génératrice minimale (voir 0.2.3 ci-dessus)) ; dans ce cas, tout élément x de E possède une décomposition unique $x_1 e_{i_1} + \cdots + x_n e_{i_n}$ sur cette base (ou plutôt sur l'ensemble $A = \{e_i \mid i \in I\}$; voir 0.3.2 ci-dessus), les scalaires x_i sont alors appelés les *coordonnées* de x sur cette base. On peut obtenir une base de E en complétant une base de F si F est un sous-espace vectoriel de E ; par exemple, en rajoutant une base de G à une base de F, si G est un supplémentaire de F dans E.

Soit $u : E \longrightarrow F$ est une application linéaire (E et F étant des K-espaces vectoriels), et $(e_i)_{i\in I}$ une base sur E ; alors u est entièrement déterminée par les $u(e_i)$ ...on définit donc u par la fixation des $u(e_i)$. De plus, on a les équivalences : u injective $\Longleftrightarrow$ les $u(e_i)$ sont indépendants ; u surjective $\Longleftrightarrow$ les $u(e_i)$ engendrent F (donc, u est un isomorphisme ssi les $u(e_i)$ forment une base de F).

Théorème : Tout espace vectoriel possède une base (utilise le lemme de Zorn cité dans 0.2.3 ci-dessus).

Toutes les bases d'un espace vectoriel E ont le même cardinal (*i.e.* sont équipotentes, voir 0.1.6 ci-dessus). On dit que deux K-espaces vectoriels ont *même dimension* si leurs bases ont même cardinal.

Proposition : Deux espaces vectoriels ont même dimension ssi ils sont isomorphes.

Preuve : Soit E et E' deux K-espaces vectoriels. Si $(e_i)_{i\in I}$ et $(e'_i)_{i\in I'}$ sont des bases de E et E' respectivement et $f : I \longrightarrow I'$ est une bijection (donc $I \leftrightarrow I'$), alors l'application $\varphi : E \longrightarrow E'$, définie par $\varphi(e_i) = e'_{f(i)}$ pour tout $i \in I$, est un isomorphisme ; inversement, si $\psi : E \longrightarrow E'$ est un isomorphisme, alors E et E' ont évidemment même dimension puisque, si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, $(\psi(e_i))_{i\in I}$ est une base de E' (voir ci-dessus). □

On dit qu'un espace vectoriel est *de dimension finie* s'il possède une base finie (sinon, on dit qu'il est *de dimension infinie*) ; dans ce cas, on appelle *dimension* de E, ce que l'on note $dim(E)$, le cardinal de l'une de ses bases (la dimension d'un K-espace vectoriel dépend du corps K). Par exemple, un corps K est un K-espace vectoriel de dimension 1 (car $\{1\}$ est une K-base de K) ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, K^n est un K-espace vectoriel de dimension n (car $e_1 = (1,0,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,0,\dots,0)$, ..., $e_n = (0,0,0,\dots,0,1)$ est une K-base, appelée *base*

canonique de K^n) ; $\mathbb{C}$ est donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1, mais c'est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 (car $\{1, i\}$ est une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}$), qui est donc isomorphe à $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, on a :

Proposition : Tout K-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à K^n.

Preuve : Résulte immédiatement de ce qui précède. Plus précisément, soit E un K-espace vectoriel de dimension n, et $e_1, \ldots, e_n$ une base de E ; alors l'application $\varphi : E \longrightarrow K^n : x \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$, où les x_i sont les coordonnées de x sur la base donnée sur E, est un isomorphisme (avec $\varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$) qui transporte la base donnée sur E sur la base canonique de K^n (l'isomorphisme φ dépend du choix de la base sur E). □

Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie, on a $dim(F) \leq dim(E)$ si F est un sous-espace vectoriel de E (on a même l'implication : $dim(F) = dim(E) \Longrightarrow F = E$, qui est fausse en dimension infinie : en voir un exemple ci-dessous), et $dim(E) = dim(F) + dim(G)$ si G est un supplémentaire de F dans E.

Toujours en dimension finie, pour toute application linéaire $u : E \longrightarrow E'$, on a les équivalences : u injective $\Longleftrightarrow dim(E) = rg\, u$, et u surjective $\Longleftrightarrow dim(E') = rg\, u$, en notant $rg\, u$ le *rang* de u, *i.e.* la dimension de $Im\, u$. De plus, on a la *formule du rang* suivante : $dim(E) = rg\, u + dim(Ker\, u)$ qui, lorsque $dim(E) = dim(E')$, donne les équivalences : u injective $\Longleftrightarrow dim(E) = rg\, u \Longleftrightarrow u$ surjective $\Longleftrightarrow$ u isomorphisme.

Le théorème ci-dessus est un théorème d'existence : sa preuve repose sur le fait que l'on peut, grâce au lemme de Zorn (voir 0.2.3 ci-dessus), plonger toute famille libre dans une base. La difficulté est de construire explicitement une telle base, lorsque l'on est en dimension infinie !

Exemples : L'espace vectoriel $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ est de dimension finie $m \times n$: les matrices E_{ij}, dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice ij qui est égal à 1, en forment une base (dite canonique) ; cet espace $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ est donc isomorphe à $\mathbb{R}^{m\times n}$ par l'isomorphisme naturel $\varphi : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$ qui, à toute matrice A, associe le $m \times n$-uplet obtenu en juxtaposant successivement les lignes de A (dans l'ordre) ; ainsi, φ transporte la base canonique de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ sur la base canonique de $\mathbb{R}^{m\times n}$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie $n + 1$: les polynômes $1, X, \ldots, X^n$ en forment une base, souvent considérée comme canonique ; l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est donc isomorphe à $\mathbb{R}^{n+1}$ par l'isomorphisme naturel $\varphi_n : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ qui, à tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, associe le $n + 1$-uplet de ses coefficients (et qui transporte donc la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ sur la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$).

L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ possède la base canonique dénombrable formée des polynômes $1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots$. On peut "transporter" cette base dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ (voir 0.1.3), grâce à l'isomorphisme naturel $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ qui, à tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$, associe la suite de ses coefficients prolongée indéfiniment par des 0 ; les $\epsilon_n = \varphi(X^n) = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$, où le seul élément non nul se situe en position $n + 1$, forment la base canonique dénombrable de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Signalons en passant que $\mathbb{R}[X]$ est isomorphe (mais non égal) à son sous-espace formé des polynômes sans termes constants, ayant pour base naturelle $X, X^2, \ldots, X^n, \ldots$ (on a un isomorphisme naturel défini par $\varphi(X^n) = X^{n+1}$).

L'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ayant au moins deux éléments distincts, est, *a fortiori*, de dimension infinie, puisqu'il

contient la suite libre formée des fonctions $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ (qui n'engendre linéairement que les fonctions polynomiales sur I (voir 0.3.5 ci-dessous) ...et donc pas $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$: par exemple, les fonctions log et exp ne sont pas polynomiales, respectivement sur $]0,+\infty[$ et $\mathbb{R}$!). Pour la même raison, le sous-espace de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ formé des fonctions continues (resp. dérivables) sur I (voir les paragraphes 0.4.1 et 0.4.2 ci-dessous) est aussi de dimension infinie. Construire explicitement une base de ces espaces vectoriels n'est pas une mince affaire !

$\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie non dénombrable car il n'admet pas de $\mathbb{Q}$-base dénombrable (si $\mathbb{R}$ en admettait une, il serait dénombrable !).

0.3.4 Soit E un espace vectoriel ; un *hyperplan* de E est un sous-espace vectoriel de E de *codimension* 1 (*i.e.* qui possède un supplémentaire de dimension 1) ; c'est donc un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$ lorsque E est de dimension finie n. On appelle *hyperplan affine* de E un sous-ensemble de E de la forme $a+H$, où $a \in E$ et H est un hyperplan de E (où $a+H = \{a+x \mid x \in H\}$).

Proposition : Soit $u : E \longrightarrow K$ une *forme linéaire* sur un K-espace vectoriel E ; alors $Ker\, u$ est égal à E (si u est identiquement nulle, ce que l'on notera $u \equiv 0$) ou bien c'est un hyperplan, et l'on peut écrire $E = Kx \oplus Ker\, u$, où x est un élément de E qui vérifie $u(x) \neq 0$ (où $Kx = \{\lambda x \mid \lambda \in K\}$).

<u>Preuve</u> : Bien sûr, si $u \equiv 0$, on a $Ker\, u = E$. Sinon, il existe un $x \in E$ tel que $u(x) \neq 0$, et donc tel que $Kx \cap Ker\, u = \{0\}$ (car $u(\lambda x) = \lambda u(x) = 0$ ssi $\lambda = 0$). L'égalité $E = Kx + Ker\, u$, elle, résulte du fait que tout $z \in E$ peut s'écrire $z = \lambda x + (z - \lambda x)$, avec $\lambda = u(z)/u(x)$; bien sûr, $z - \lambda x \in Ker\, u$. □

Corollaire : Soit u une forme linéaire non identiquement nulle sur un K-espace vectoriel E, et $\lambda \in K$; alors $\overset{-1}{u}(\{\lambda\})$ est un hyperplan affine qui s'écrit $\overset{-1}{u}(\{\lambda\}) = a + Ker\, u$, où $u(a) = \lambda$ (en fait, $a = (\lambda/u(x))x$, où $x \in E$ vérifie $u(x) \neq 0$).

En fait, tout hyperplan d'un espace vectoriel E est le noyau d'une forme linéaire sur E ; tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E est une intersection d'hyperplans de E.

0.3.5 On appelle $\mathbb{R}$-*algèbre* un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{A}$ muni d'une multiplication (interne) associative, distributive par rapport à son addition (ainsi, $\mathcal{A}$ est aussi un anneau) et vérifiant, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x, y \in \mathcal{A}$, $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$; la multiplication interne est donc une application bilinéaire (voir 0.3.2 ci-dessus). Une $\mathbb{R}$-*algèbre commutative* est une $\mathbb{R}$-algèbre dont la multiplication est commutative (on omettra le symbole $\mathbb{R}$; il nous arrivera aussi de considérer des $\mathbb{C}$-algèbres : voir 6.1.10 et 6.1.12 et la section VIII.5).

<u>Exemples</u> : Les espaces $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$, où E est un ensemble, et $\mathbb{R}[X]$ sont des algèbres commutatives dont la multiplication est le produit (des applications dans le premier cas, des polynômes dans le second). Si E est un espace vectoriel, l'espace $\mathcal{L}(E,E)$ des applications linéaires $E \longrightarrow E$, est une algèbre non commutative dont la multiplication est la composition de ces applications ; l'espace $M_n(\mathbb{R})$ est une algèbre non commutative dont la multiplication est le produit des matrices.

Un *homomorphisme* (resp. *un isomorphisme*) *d'algèbres* est une application (resp. une bijection) entre algèbres qui respecte les opérations de ces algèbres. Une *sous-algèbre* d'une algèbre $\mathcal{A}$ est une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ qui est une algèbre et telle

que l'injection canonique $j : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ soit un homomorphisme d'algèbres ($\mathcal{B}$ est commutative lorsque $\mathcal{A}$ l'est).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, ayant au moins deux éléments, et notons $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur I (voir 0.4.1 ci-dessous) ; alors $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de l'algèbre commutative $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$; elle est donc commutative (sa multiplication étant le produit des fonctions continues sur I). De plus, l'espace des *fonctions polynomiales sur* I est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$.

On peut "voir" l'espace $\mathbb{R}[X]$ comme une sous-algèbre de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$: en effet, on dispose d'une homomorphisme d'algèbres injectif naturel $j : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui associe la fonction polynomiale $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ à tout polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ (son injectivité résulte du fait que, si la fonction polynomiale $f = j(P)$ est identiquement nulle, alors tous les coefficients du polynôme P sont nuls : il suffit, pour le voir, de faire $x = 0$ dans les dérivées successives de f). On peut donc identifier $\mathbb{R}[X]$ à la sous-algèbre $j(\mathbb{R}[X])$ de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, formée des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$.

En fait, $\mathbb{R}[X]$ s'identifie aussi à une sous-algèbre de tous les $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, ayant au moins deux éléments distincts. En effet, il suffit de remarquer que l'homomorphisme d'algèbres $\gamma : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, défini par $\gamma(P) = (j(P))|_I$, la restriction de la fonction polynomiale $j(P)$ à I, est encore injectif : en effet, $(j(P))(x) = 0$ pour tout $x \in I$ signifierait que le polynôme P a une infinité de racines (au moins tous les éléments de I), ce qui n'est vrai que pour le polynôme nul (*i.e.* dont tous les coefficients sont nuls).

En conclusion, tout polynôme, *i.e.* tout élément de $\mathbb{R}[X]$, peut être "interprété" de deux manières différentes : ou bien comme une suite, celle de ses coefficients, *i.e.* comme un élément de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ (voir 0.3.3), ou bien comme une fonction polynomiale (et donc traité comme tel), *i.e.* comme un élément de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Selon les situations que l'on rencontrera, on privilégiera l'une (algébrique) ou l'autre (fonctionnelle) de ces interprétations.

4. Fonctions à variables réelles

Dans tout ce qui suit, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, ayant au moins deux éléments distincts. On note $\mathring{I}$ et $\overline{I}$ l'intérieur et la fermeture de I dans $\mathbb{R}$. Rappelons que l'on a les inclusions $\mathring{I} \subset I \subset \overline{I} \subset \mathbb{R}$, que $a \in \mathring{I}$ ssi a n'est pas une extrémité de I, et que les éléments de $\overline{I} - \mathring{I}$ sont les extrémités de I (qui peuvent appartenir ou non à I ; voir 0.2.5 ci-dessus).

0.4.1 Soit a un élément de $\overline{I}$ et l un réel. Dans le cas où a n'est pas l'extrémité gauche de I, on dit que f *tend vers* l *quand* x *tend vers* a *à gauche*, ce que l'on écrit $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} l$, si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad (0 < a - x < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon).$$

Quand un tel réel l existe, il est unique (cela résulte de nos hypothèses : on a supposé ici que a n'est pas l'extrémité gauche de I, et $a \in \overline{I}$; voir 4.1.1 et 4.1.8), c'est pourquoi, lorsque $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} l$, on dit aussi que l est *la limite à gauche de* f *au point* a (ou *en* a), et on le note $l = \lim_{x \to a^-} f(x)$, ou encore $l = f(a^-)$.

De façon symétrique, dans le cas où a n'est pas l'extrémité droite de I, on

dit que *f tend vers l quand x tend vers a à droite*, ou encore que l est *la limite à droite de f au point a* (ou *en a*), ce que l'on écrit $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} l$, ou $l = \lim_{x\to a^+} f(x)$ ou encore $l = f(a^+)$, si on a la propriété suivante :

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\eta > 0 \quad \forall x \in I \quad (0 < x - a < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

Attention, a^- et a^+ n'ont qu'une existence symbolique, ils n'existent pas (c'est une pure notation).

On dit que *f tend vers l quand x tend vers a (avec $x \neq a$)*, ou encore que l est *la limite stricte de f au point a* (ou *en a*), ce que l'on écrit $f(x) \underset{a\neq x\to a}{\longrightarrow} l$ ou $l = \lim_{a\neq x\to a} f(x)$, si on a la propriété suivante :

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\eta > 0 \quad \forall x \in I \quad (0 < |a - x| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

A nouveau, l'unicité de cette limite, lorsqu'elle existe, résulte du fait que $a \in \overline{I}$ (voir 4.1.1 et 4.1.8). Se référant à ce qui précède, on obtient, selon que a est à l'intérieur de I ou est l'une de ses extrémités, les équivalences :

- Si $a \in \overset{\circ}{I}$; alors $f(x) \underset{a\neq x\to a}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} l$ et $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} l$ (*i.e.* ssi les limites $f(a^-)$ et $f(a^+)$ existent et sont égales à l).
- Si a est l'extrémité gauche de I ; alors $f(x) \underset{a\neq x\to a}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} l$ (*i.e.* ssi la limite $f(a^+)$ existe et est égale à l).
- Si a est l'extrémité droite de I ; alors $f(x) \underset{a\neq x\to a}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} l$ (*i.e.* ssi la limite $f(a^-)$ existe et est égale à l).

En se plaçant dans $\overline{\mathbb{R}}$, l'intervalle I étant non borné dans $\mathbb{R}$ (voir 0.2.5), on peut parler de $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l$ ou de $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} l$, avec $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Se reporter à 4.1.7 où tout ceci sera développé dans un cadre topologique général.

En fait, on va simplifier tout ce qui précède grâce à la topologie : tous ces cas particuliers se synthétisent en un seul cas qui les englobe tous (voir précisément 4.1.1, 4.1.7 et 4.1.8).

Supposons que f possède une limite à gauche (resp. à droite) au point $a \in \overline{I}$; a n'est donc pas l'extrémité gauche (resp. droite) de I. Si $a \in I$, on dit que f est *continue à gauche* (resp. *continue à droite*) *au point a* (ou *en a*) si elle vérifie $f(a) = f(a^-)$ $\big($resp. $f(a) = f(a^+)\big)$. Si $a \in \overline{I} - I$ (l'intervalle I n'est donc pas fermé ici), on pose $f(a) = f(a^-)$ si a est l'extrémité droite de I $\big($resp. $f(a) = f(a^+)$ si a est l'extrémité gauche de $I\big)$, et on dit alors que $f : I \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ est *le prolongement de f* (initialement seulement définie sur I) qui est *continu à gauche* (resp. *à droite*) *au point a* (ou *en a*). Quitte à prolonger, quand c'est possible, f aux extrémités non fermées de l'intervalle I comme ci-dessus, on supposera dans ce qui suit que $a \in I$.

On dit que f est *continue au point a* (ou *en a*) si elle vérifie la propriété $(\mathcal{C}_a)$ suivante : $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\eta > 0 \quad \forall x \in I \quad (|a - x| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$; l'implication dans la parenthèse précédente étant automatiquement vérifiée pour $x = a$, il est implicite que l'on peut se limiter aux $x \neq a$ dans cette parenthèse. On dira alors que *f(x) tend vers f(a) quand x tend vers a*, ce que l'on écrira $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$ ou encore $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$. Se référant à ce qui précède, on obtient, selon que a est à l'intérieur de I ou non, les équivalences :

- Si $a \in \overset{\circ}{I}$; alors f est continue au point $a \Longleftrightarrow f$ est continue à gauche et à droite au point a $\big($*i.e.* ssi les limites $f(a^-)$ et $f(a^+)$ existent et sont égales

à $f(a)$). Attention, les limites $f(a^-)$ et $f(a^+)$ peuvent exister et être égales (*i.e.* $\lim_{a\neq x\to a} f(x)$ existe) sans que f soit continue (ni même définie d'ailleurs !) au point a : considérer par exemple, pour $a = 0$, la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ ou 0 selon que $x = 0$ ou non (elle vérifie $f(0^-) = f(0^+) = 0 \neq f(0)$).

- Si a est l'extrémité gauche de I ; alors f est continue au point $a \iff f$ est continue à droite au point a (*i.e.* ssi la limite $f(a^+)$ existe et est égale à $f(a)$).

- Si a est l'extrémité droite de I ; alors f est continue au point $a \iff f$ est continue à gauche au point a (*i.e.* ssi la limite $f(a^-)$ existe et est égale à $f(a)$).

Lorsque f n'est pas continue au point a, on dit que a est un *point de discontinuité* de f.

f est dite *continue sur I* si elle est continue en tout point de I. On note $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I ; on a vu (dans 0.3.3 ci-dessus) que c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Proposition : Si f est continue sur I et si $a, b \in I$ vérifient $a < b$, alors f est *bornée* et *atteint ses bornes sur* $[a,b]$ (en ce sens qu'il existe $x_0, x_1 \in [a,b]$ tels que $\inf_{x\in[a,b]} f(x) = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\} = f(x_0)$ et $\sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_1)$).

Théorème des valeurs intermédiaires : Si f est continue sur I, si $a, b \in I$ vérifient $a < b$ et si r est un réel tel que $f(a) \leq r \leq f(b)$, alors il existe un réel c tel que $a \leq c \leq b$ et $f(c) = r$.

Corollaire : Si f est continue, alors l'image $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

On a déjà vu (dans 0.2.5 ci-dessus) que l'on a $f(]a,b[) =]f(a), f(b)[$ (resp. $f(]a,b[) =]f(b), f(a)[$) pour toute bijection $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est croissante (resp. décroissante) et tous réels $a < b$; c'est encore vrai pour toute bijection continue $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (on voit facilement, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, qu'une telle bijection continue est monotone — voir 4.2.13 et [1] 1.1.4).

0.4.2 Ici encore, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie sur l'intervalle I et $a \in I$. Supposons que a n'est pas l'extrémité gauche (resp. droite) de I : on dit alors que f est *dérivable à gauche* (resp. *dérivable à droite*) *au point* a (ou *en* a) si la limite $\lim_{x\to a^-}(f(x) - f(a))/(x - a)$ (resp. si la limite $\lim_{x\to a^+}(f(x) - f(a))/(x - a)$) existe dans $\mathbb{R}$; quand elle existe dans $\mathbb{R}$, cette limite est unique, notée $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$) et appelée la *dérivée à gauche* (resp. la *dérivée à droite*) *de* f *au point* a (ou *en* a). L'existence d'une dérivée à gauche (resp. à droite) pour f au point a se traduit géométriquement par le fait que le graphe de f possède une demi-tangente à gauche (resp. à droite) au point $(a, f(a))$, le réel $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$) étant la pente de cette demi-tangente.

Proposition : Si f est dérivable à gauche (resp. à droite) au point a, alors f est continue à gauche (resp. à droite) au point a.

Preuve : On pose $h = x - a$ et $\varepsilon(h) = ((f(x) - f(a))/h) - f'_g(a)$; alors $\varepsilon(h) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} 0$ et donc $f(x) - f(a) = h(f'_g(a) + \varepsilon(h)) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} 0$. □

On dit que f est *dérivable point* a (ou *en* a) si la limite suivante existe dans $\mathbb{R}$: $\lim_{a\neq x\to a}(f(x) - f(a))/(x - a)$; cette limite, quand elle existe dans $\mathbb{R}$, est unique, appelée la *dérivée de* f *au point* a (ou *en* a) et se note $f'(a)$. Se référant à ce qui précède, on obtient, selon que a est à l'intérieur de I ou non, les équivalences :

- Si $a \in \overset{\circ}{I}$; alors f est dérivable au point $a \Longleftrightarrow f$ est dérivable à gauche et à droite au point a (alors $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$). L'existence d'une dérivée pour f au point a se traduit géométriquement par le fait que son graphe possède une tangente au point $(a, f(a))$, dont la pente $f'(a)$ est la valeur commune des pentes des demi-tangentes à droite et à gauche en ce point.

- Si a est l'extrémité gauche de I ; alors f est dérivable au point $a \Longleftrightarrow$ f est dérivable à droite au point a (alors $f'(a) = f'_d(a)$).

- Si a est l'extrémité droite de I ; alors f est dérivable au point $a \Longleftrightarrow$ f est dérivable à gauche au point a (alors $f'(a) = f'_g(a)$).

Corollaire : Si f est dérivable au point a, alors f est continue au point a.

On dit que f est *dérivable sur I* si elle est dérivable en tout point de I ; on note alors $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f'(x)$. On rappelle rapidement les dérivées des fonctions dérivables usuelles :

$(x^n)' = nx^{n-1}$ (pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en exigeant $x \neq 0$ lorsque $n < 0$; pour $n = 0$, on obtient que la dérivée de toute fonction constante est identiquement nulle),

$(e^x)' = e^x$, $\log' x = 1/x$,

$\sin' x = \cos x$, $\cos' x = -\sin x$, $\mathrm{tg}' x = 1/(\cos x)^2$, $\mathrm{Arctg}' x = 1/(1+x^2)$ ...etc. Pour la dérivée de la tangente, on a utilisé la formule $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$, valable si l'on se limite à un "domaine" sur lequel g ne s'annulle pas ; on rappelle aussi les formules qui permettent d'utiliser ces dérivées pour en calculer bien d'autres : $(fg)' = f'g + fg'$ et $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$; dans tout ce qui précède, on a évidemment affaire à des fonctions dérivables (chacune sur un "domaine spécifique"), et dans la dernière formule, f et g sont composables.

Corollaire : Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I ; on a vu (dans 0.3.3 ci-dessus) que c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie. De plus, l'application $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) : f \mapsto f'$ est linéaire. On dit que f est *de classe* C^1 sur I si elle est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I ; plus généralement, on dit que f est *de classe* C^p sur I si elle possède des dérivées successives sur I, notées $f', f'', \ldots, f^{(p)}$, toutes continues sur I. On note $C^p(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^p sur I ; c'est un sous-espace de $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ qui est encore de dimension infinie.

Théorème des accroissements finis : Soit $a, b \in I$ vérifiant $a < b$; on suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe un réel c vérifiant $a < c < b$ et $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Corollaire : Soit $a, b \in I$ vérifiant $a < b$, et supposons que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$; on a alors l'implication : $f'(b^-)$ existe $\Longrightarrow f'_g(b)$ existe et $f'_g(b) = f'(b^-)$ (on a la même implication en remplaçant $f'(b^-)$ et $f'_g(b)$, respectivement par $f'(a^+)$ et $f'_d(a)$). Par suite, si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[-\{c\}$ (*i.e.* sur les intervalles $]a, c[$ et $]c, b[$) où $a < c < b$, on a l'implication : $\lim_{c \neq x \to c} f'(x)$ existe $\Longrightarrow f$ est dérivable au point c et $f'(c) = \lim_{x \to c} f'(x)$ (f' est donc continue au point c).

Preuve : On applique le théorème des accroissements finis sur tout intervalle $[x, b]$ où $a < x < b$: pour tout réel x vérifiant $a < x < b$, il existe un réel c_x vérifiant $x < c_x < b$ et $f(b) - f(x) = f'(c_x)(b - x)$, et donc aussi $(f(b) - f(x))/(b - x) =$

$f'(c_x)$; il en résulte que $f'(b^-) = \lim_{x\to b^-} f'(x) = \lim_{x\to b^-} f'(c_x) = f'_g(b)$ ...on a utilisé le fait que $c_x \to b^-$, lorsque $x \to b^-$. □

Exemples : La fonction $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (avec $f' \equiv -1$ sur $]-\infty, 0[$ et $f' \equiv 1$ sur $]0, +\infty[$). Par suite, en 0, les limites $f'(0^-)$ et $f'(0^+)$ existent et sont égales respectivement à -1 et 1 ; les dérivées à gauche et à droite existent donc en ce point et l'on a $f'_g(0) = f'(0^-) = -1$ et $f'_d(0) = f'(0^+) = 1$, si bien que f n'est pas dérivable en 0 (*i.e.* $f'(0)$ n'existe pas).

La fonction g, définie par $g(x) = 0$ ou $x \sin 1/x$ selon que $x = 0$ ou non, est continue sur $\mathbb{R}$ (c'est évident sur $\mathbb{R}^*$; en 0, on utilise la majoration $|g(x)| \leq |x|$). Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ $\big($avec $g'(x) = \sin 1/x - (1/x)\cos 1/x\big)$; les limites $g'(0^-)$ et $g'(0^+)$ n'existent pas puisque les dérivées à gauche et à droite de g en 0 n'existent pas $\big($car $g(x)/x = \sin 1/x$ n'a pas de limite en 0, ni à gauche, ni à droite$\big)$.

La fonction h, définie par $h(x) = xg(x)$, est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ $\big($avec $h'(x) = 2x \sin 1/x - \cos 1/x\big)$; elle est aussi dérivable en 0 : $h(x)/x = x \sin 1/x \underset{0\neq x\to 0}{\longrightarrow} 0$, puisque sin est bornée. Cependant, les limites $h'(0^-)$ et $h'(0^+)$ n'existent pas (car la fonction $\cos 1/x$ n'a pas de limite en 0, ni à gauche, ni à droite) ; la dérivée h' n'est donc pas continue en 0.

La fonction k définie par $k(x) = x^2 g(x)$, elle, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ $\big($car $k'(x) = 3x^2 \sin 1/x - x \cos 1/x \underset{0\neq x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

La fonction φ égale à -1 sur $]-\infty, 0[$, $+1$ sur $]0, +\infty[$ et nulle en 0, n'est pas continue en 0 (ni sur aucun intervalle $[a, b]$ contenant 0) ; bien que de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, avec $\varphi' \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^*$. Par suite, φ n'est pas dérivable en 0 (bien que les limites $\varphi'(0^-)$ et $\varphi'(0^+)$ existent et soient identiquement nulles) ; les dérivées à gauche et à droite en 0 n'existent pas puisque $\varphi(x)/x = -1/x$ ou $1/x$ selon que $x < 0$ ou $x > 0$ (géométriquement parlant, on peut considérer que le graphe de φ possède, en 0, une "tangente verticale", *i.e.* de pente infinie). Ainsi, l'hypothèse de continuité est nécessaire dans le corollaire ci-dessus. On verra dans 0.4.6 que ce φ est une fonction "μ-continue par morceaux" qui est la "quasi-dérivée" de la fonction non dérivable f étudiée ci-dessus.

0.4.3 On va définir maintenant un nouveau type d'addition : il va s'agir d'une addition infinie (*i.e.* ayant un nombre infini, souvent non dénombrable, de termes) de "quantités infinitésimales" (*i.e.* infiniment petites) $f(x)dx$ pour une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ ayant au moins deux éléments distincts) appartenant à une classe appropriée de fonctions dans laquelle on peut donner un sens à ces sommes. On donne ci-dessous un exemple fondamental d'une telle classe de fonctions : celle des fonctions "Riemann-intégrables".

Chacune des expressions $f(x)dx$ peut être vue comme le "produit des réels" $f(x)$ et dx, et donc comme l'aire d'un "rectangle infinitésimal" dont deux des côtés sont respectivement le segment vertical d'extrémités $(x, 0)$ et $(x, f(x))$, et le segment horizontal infinitésimal d'extrémités $(x, 0)$ et $(x + dx, 0)$, où dx est un accroissement infinitésimal de la variable x ; à ceci près que chacune de ces aires infinitésimales possède un signe : celui de $f(x)$.

Ainsi, lorsqu'elle a un sens, la somme infinie de ces aires infinitésimales, quand x varie dans $[a, b] \subset I$, est un réel qui peut être vu, lorsque la surface évoquée ci-dessous peut se "dessiner" facilement (et ce sera le cas des fonctions en escalier, continues ou continues par morceaux considérées plus loin), comme l'aire de la

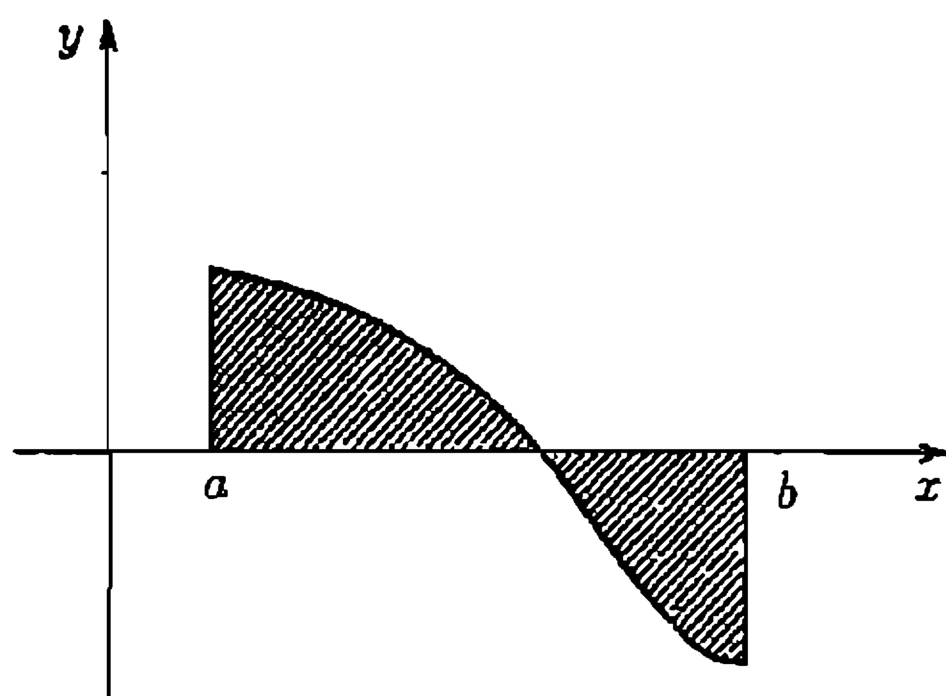


Figure 0 (0.4.3)

surface (figure 0) délimitée par le graphe de f, l'axe des x, et les deux verticales en $x = a$ et en $x = b$, en comptant positivement (resp. négativement) l'aire de la surface au dessus (resp. au dessous) de l'axe des x.

Cette somme infinie, toujours lorsqu'elle a un sens, est un réel que l'on pourrait noter abusivement $\sum_{x=a}^{b} f(x)dx$, mais que l'on a coutume de noter $\int_a^b f(x)dx$ et d'appeler l'*intégrale de f sur* $[a,b]$. Dans une telle intégrale, la variable x est "muette" (c'est un réel qui varie dans l'intervalle $[a,b]$), donc peu importe comment on la note, à condition toutefois de la noter par un même symbole dans ses deux occurences sous l'intégrale : ainsi, $\int_a^b \ f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt$ ...etc.

Commençons par un cas particulier très parlant, où tout ce qui vient d'être introduit ci-dessus prend tout son sens : celui des fonctions en escalier. Fixons $a, b \in I$ vérifiant $a < b$ et soit $\varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i 1_{[a_i,a_{i+1}[}$ une fonction en escalier sur $[a,b]$ (voir 0.1.2) ; c'est donc aussi une fonction en escalier sur I, qui vaut 0, à gauche de a et à droite de b. L'expression $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(a_{i+1} - a_i)$ est un réel qui, comme on peut le voir facilement sur une figure, est justement l'aire de la surface délimitée par le graphe de φ, l'axe des x, et les deux verticales en $x = a$ et en $x = b$, en comptant positivement (resp. négativement) l'aire de la surface au dessus (resp. au dessous) de l'axe des x. Il est donc légitime de dire que cette somme $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(a_{i+1} - a_i)$ est l'*intégrale de φ sur* $[a,b]$ et de la noter $\int_a^b \varphi(x)dx$. Dans la suite, toute fonction notée φ ou ψ, sera une fonction en escalier sur $[a,b]$. Par définition, on voit que cette intégrale est linéaire et croissante, *i.e.* que l'on a d'une part $\int_a^b(\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x))dx = \lambda \int_a^b \varphi(x)dx + \mu \int_a^b \psi(x)dx$ lorsque $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et d'autre part $\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx$ lorsque $\varphi \leq \psi$.

Soit maintenant $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et $a, b \in I$ vérifiant $a < b$; on dit que f est *intégrable au sens de Riemann* (ou *Riemann-intégrable*) *sur* $[a,b]$, si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \varphi, \psi \qquad \varphi \leq f \leq \psi \ \text{ et } \ \int_a^b(\psi(x) - \varphi(x))dx < \varepsilon.$$

L'intégrale précédente a bien un sens puisque la fonction $\psi - \varphi$ est en escalier sur $[a,b]$, l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$. Par définition, toute fonction Riemann-intégrable f sur $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$ (puisque les fonctions en escaliers le sont) ; les bornes $\alpha = \sup_{\varphi\leq f} \int_a^b \varphi(x)dx$ et $\beta = \inf_{f\leq\psi} \int_a^b \psi(x)dx$ existent dans $\mathbb{R}$ (puisque, par exemple, l'ensemble $\{\int_a^b \varphi(x)dx \mid \varphi \leq f\}$ est non vide et majoré par définition même de la Riemann-intégrabilité ; voir 0.2.4 ci-dessus) et sont égales (l'inégalité

$\alpha \leq \beta$ va de soi puisque toutes les fonctions en escalier considérées vérifient $\varphi \leq f \leq \psi$; l'inégalité inverse est, elle aussi, une conséquence immédiate de la définition de la Riemann-intégrabilité qui implique en effet $\beta \leq \alpha + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$). On note $\int_a^b f(x)dx$ cette valeur commune $\alpha = \beta$; c'est un réel que l'on appelle l'*intégrale de f sur* $[a,b]$. On pose $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ lorsque $a < b$, $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Bien sûr, toute fonction en escalier sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$. On note $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$; c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel qui est ordonné par l'ordre induit de $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ (voir 0.2.1 ci-dessus) et l'application $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ est linéaire et croissante ; elle vérifie de plus $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ pour tout $c \in [a,b]$, et $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ (sachant que, si f est Riemann-intégrable, alors $|f|$ l'est aussi).

Proposition : Si f est continue sur I, alors elle est Riemann-intégrable sur tout $[a,b] \subset I$.

Proposition : Si f est continue, positive ou nulle sur I et d'intégrale nulle sur $[a,b]$ (où $a, b \in I$ vérifient $a < b$), alors f est identiquement nulle sur $[a,b]$.

Preuve : Prouvons-le ici pour $I = [a,b] = [0,1]$. Soit donc $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$ (on a donc $\int_0^1 f(x)dx \geq 0$) ; prouvons dans premier temps que f est identiquement nulle sur $]0,1[$. Sinon, il existerait un $a \in]0,1[$ tel que $f(a) > 0$; montrons qu'alors on aurait $\int_0^1 f(x)dx \neq 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < f(a)$. Ecrivons alors la continuité de f au point a (*i.e.* la propriété (C_a) de 0.4.1 ci-dessus) : il existe un $\eta > 0$ (quitte à diminuer η, on peut supposer qu'il vérifie $0 < a - \eta < a < a + \eta < 1$) tel que $|x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$, et donc tel que l'on ait $f(x) > f(a) - \varepsilon$ pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[$. On peut donc écrire $\int_0^1 f(x)dx \geq \int_{a-\eta}^{a+\eta} f(x)dx > 2\eta(f(a) - \varepsilon) > 0$, si bien que $\int_0^1 f(x)dx > 0$. On a ainsi prouvé que f est identiquement nulle sur $]0,1[$. Comme f est continue sur $[0,1]$, on en déduit immédiatement que $f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ et $f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$. □

0.4.4 Soit toujours $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur I, et $a, b \in I$ vérifiant $a < b$. On dit qu'une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une *primitive* de f si elle est dérivable (donc continue) et vérifie $F' = f$. Si f est continue, alors f possède une primitive (une telle primitive est unique à une constante additive près) ; plus précisément :

Proposition : Supposons f continue et soit $a \in I$; alors la fonction $F_a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in I$, par $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$, est une primitive de f sur I (c'est celle qui s'annule en a).

En fait, dans la pratique, c'est plutôt l'inverse qui se produit : la connaissance d'une primitive F de f sur I nous permet de calculer l'intégrale de f sur tout $[a,b] \subset I$; on a en effet la formule $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, et on a coutume de poser $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$. Plus généralement (on retrouve la formule précédente en faisant $f \equiv 1$ dans celle qui suit), on a une *formule d'intégration par parties* : $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$ pour toutes fonctions f et g de classe C^1 sur $[a,b]$ (qui résulte de la formule $(fg)' = fg' + f'g$).

0.4.5 On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est *continue par morceaux* si elle possède un nombre fini de points de discontinuité dans tout intervalle borné de I (ses points de discontinuité forment donc un ensemble dénombrable : voir 0.1.6 ci-dessus) et si, en chacun de ses points de discontinuité de $\overset{\circ}{I}$, elle possède une limite à gauche et une limite à droite, et seulement une limite à droite (resp. à gauche) en une éventuelle extrémité gauche (resp. droite) de I ; voir 0.4.1 ci-dessus. Les fonctions continues et les fonctions en escalier sont des exemples très simples de fonctions continues par morceaux. Les fonctions continues par morceaux sur I forment évidemment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie (c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ qui contient $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$).

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux est bornée sur tout intervalle fermé et borné $[a,b]$ de I : en effet, si $a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont ses points de discontinuité dans $]a,b[$ ($a_0 = a$ ou $a_n = b$ peuvent aussi être des points de discontinuité de f, à droite pour le premier, à gauche pour le second), et si, pour tout $i = 0, \ldots, n-1$, on note $f_i : [a_i, a_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ le prolongement continu (voir 0.4.1), à $[a_i, a_{i+1}]$, de la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$, égal donc à f sur $]a_i, a_{i+1}[$, et égal à $f(a_i^+)$ et $f(a_{i+1}^-)$ en a_i et a_{i+1} respectivement, alors, d'après 0.4.1, chaque f_i est bornée (disons par un $\alpha_i \geq 0$), de sorte que, pour tout $x \in [a,b]$, on a $|f(x)| \leq \sup(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, |f(a)|, |f(a_1)|, \ldots, |f(a_{n-1})|, |f(b)|)$.

Proposition : Toute fonction continue par morceaux $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur tout intervalle fermé et borné $[a,b]$ de I ; plus précisément, (en conservant les notations ci-dessus), on a $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(x)dx$ (cette intégrale ne dépend donc pas des valeurs de f en ses points de discontinuité).

On généralise maintenant la notion de primitive aux fonctions continues par morceaux. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux ; on dit qu'une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une *primitive* de f si elle est continue sur I et si, en dehors des points de discontinuité de f, elle est dérivable et admet f pour dérivée. Utilisant le corollaire du théorème des accroissements finis (voir 0.4.2 ci-dessus), on voit qu'une telle primitive F de f possède en outre, en tout point $x \in \overset{\circ}{I}$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite : plus précisément, on a $F'_g(x) = f(x^-)$ et $F'_d(x) = f(x^+)$ pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$; et, si x est l'extrémité gauche (resp. droite) de I, on a seulement $F'_d(x) = f(x^+)$ (resp. $F'_g(x) = f(x^-)$) ; ces dérivées à gauche et à droite étant égales à $f(x)$ en tout point x où f est continue. Par exemple, une primitive de la fonction en escalier $\varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i 1_{[a_i, a_{i+1}[}$ est une fonction en zigzag (ou en lignes brisées) *i.e.* continue, affine par morceaux, dont la pente sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ est λ_i.

Toute fonction continue par morceaux $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ possède une primitive (unique à une constante additive près) ; plus précisément :

Proposition : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $a \in I$; alors, la fonction $F_a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in I$, par $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$, est une primitive de f sur I (c'est celle qui s'annule en a).

La formule $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, rappelée (dans 0.4.4 ci-dessus) pour une fonction continue f, est encore vraie lorsque f est continue par morceaux (et F une primitive de f).

On dira d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ qu'elle est C^1 *par morceaux* si c'est une primitive d'une fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux (toute fonction C^1 par morceaux est donc continue par définition) ; se référant à tout ce qui précède, on conviendra d'appeler g une *quasi-dérivée* de f (une telle quasi-dérivée n'est pas unique : par exemple, la fonction non dérivable $f(x) = |x|$ (voir 0.4.2) est C^1 par morceaux et admet pour quasi-dérivées toutes les fonctions continues par morceaux g_a définies par $g_a(x) = -1, +1$ ou a, selon que $x < 0$, $x > 0$ ou $x = 0$).

On a encore (les quasi-dérivées remplaçant alors les dérivées) une formule d'intégration par parties (voir 0.4.4) pour les fonctions C^1 par morceaux.

0.4.6 Comme on l'a déjà remarqué pour les fonctions continues, l'intégrale des fonctions continues par morceaux est linéaire et croissante ; elle vérifie donc $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ pour tout $f : I \longrightarrow [0, +\infty[$ et tout $a, b \in I$ vérifiant $a < b$. Par contre, on n'a plus un énoncé du type de la dernière proposition de 0.4.3 pour les fonctions continues par morceaux non continues (considérer, par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nulle partout sauf en 0 où elle vaut 1, dont l'intégrale, sur $[-1, 1]$, est nulle ...voir la 1ère proposition de 0.4.5). Pour disposer d'un énoncé analogue pour les fonctions continues par morceaux, on peut (et c'est un choix tout à fait approprié pour l'emploi que nous en faisons dans la section VIII.5 : voir le théorème de Dirichlet dans 8.5.13 et 8.5.14) se limiter aux fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont continues par morceaux et qui vérifient $f(x) = (f(x^-) + f(x^+))/2$ pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$ (voir la proposition ci-dessous). On dira de telles fonctions qu'elles sont *μ-continues par morceaux* ; elles sont Riemann-intégrables sur tout intervalle $[a, b] \subset I$ (puisque continues par morceaux).

Proposition : Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction qui est μ-continue par morceaux, positive ou nulle sur $[a, b] \subset I$ et d'intégrale nulle sur $[a, b]$, alors f est identiquement nulle sur $]a, b[$.

<u>Preuve</u> : Soit f une telle fonction, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ ses points de discontinuité dans $]a, b[$ ($a_0 = a$ ou $a_n = b$ pouvant être des points de discontinuité, à droite pour le premier, à gauche pour le second) ; on a vu dans 0.4.5 ci-dessus que son intégrale sur $[a, b]$ s'écrit $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(x)dx$, en notant, pour tout $i = 0, \ldots, n-1$, $f_i : [a_i, a_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ le prolongement continu à $[a_i, a_{i+1}]$, de la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$. Par hypothèse, on a $\int_a^b f(x)dx = 0$ et donc $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(x)dx = 0$ pour tout $i = 0, \ldots, n-1$ (puisque les f_i sont tous ≥ 0), de sorte que, d'après la dernière proposition de 0.4.3, on obtient $f_i = 0$ sur $[a_i, a_{i+1}]$ pour tout $i = 0, \ldots, n-1$, et donc, en particulier, $f(a^+) = 0$, $f(b^-) = 0$ et $f(a_i^-) = 0 = f(a_i^+)$ (par suite $f(a_i) = (f(a_i^-) + f(a_i^+))/2 = 0$) pour tout $i = 1, \ldots, n-1$. □

On dira qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est *μ-C^1 par morceaux* si c'est une primitive d'une fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ μ-continue par morceaux ; f est donc continue, d'après 0.4.5. Lorsque $I = \mathbb{R}$, g est alors l'unique quasi-dérivée de f (voir 0.4.5) ; on la notera f'. Par exemple, la fonction $f(x) = |x|$ est non dérivable rappelons-le, mais elle est μ-C^1 par morceaux, sa quasi-dérivée étant la fonction f' définie par $f'(x) = -1, +1$ ou 0, selon que $x < 0$, $x > 0$ ou $x = 0$ (voir 0.4.5). En vertu de ce qui précède, on a encore une formule d'intégration par parties (voir 0.4.5) pour les fonctions μ-C^1 par morceaux, et l'application $f \mapsto f'$ est linéaire.

0.4.7 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et T un réel > 0. On dit que f est *périodique de période* T, ou T*-périodique*, si elle vérifie $f(x) = f(x+T)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Une fonction T-périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ équivaut à la donnée d'une fonction $g : [0,T[\longrightarrow \mathbb{R}$: en effet, si f est donnée, g est la restriction de f à $[0,T[$; et, si g est donnée, on définit la fonction T-périodique f (appelée alors le *prolongement* T*-périodique* de g à $\mathbb{R}$) par $f(x) = g(x-kT)$ où k est l'unique entier tel que $kT \leq x < (k+1)T$ (*i.e.* k est la partie entière de x/T). En fait, une fonction T-périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est aussi équivalente à la donnée d'une fonction $h : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $h(0) = h(T)$.

Toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, T-périodique et continue (resp. et continue par morceaux) est bornée (car sa restriction à $[0,T]$ l'est et $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \sup_{x\in[0,T]} |f(x)|$) et Riemann-intégrable sur $[0,T]$. De plus, toute fonction f qui est T-périodique et μ-continue par morceaux, est entièrement déterminée par sa restriction à $]0,T[$: il suffit en effet de poser $f(0) = f(T) = (f(0^+) + f(T^-))/2$, puis de prolonger T-périodiquement à $\mathbb{R}$ tout entier comme ci-dessus. On peut donc utiliser la proposition de 0.4.6 pour obtenir le résultat suivant :

Proposition : Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction qui est T-périodique, μ-continue par morceaux, positive ou nulle sur $[0,T]$ et d'intégrale nulle sur $[0,T]$, alors f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

On notera $C_{(T)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (resp. $C^{\mu}_{(T)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont T-périodiques et continues (resp. et μ-continue par morceaux) ; c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Sur ces espaces, l'intégrale possède toutes les propriétés rappelées précédemment.

On signale enfin qu'une primitive d'une fonction $f \in C^{\mu}_{(T)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est une fonction μ-C^1 par morceaux (voir 0.4.6 ci-dessus) qui n'a aucune raison d'être T-périodique : par exemple, la fonction continue $f(x) = 1+\cos x$ est 2π-périodique, alors que $F(x) = x + \sin x$ ne l'est pas. Par contre, si $f \in C_{(T)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est dérivable (au sens de 0.4.2), sa dérivée est aussi T-périodique (car $f'(x+T) = \lim_{0\neq h\to 0}(f(x+T+h) - f(x+T))/h = \lim_{0\neq h\to 0}(f(x+h) - f(x))/h = f'(x)$). Plus généralement, si f est μ-C^1 par morceaux et T-périodique, alors sa quasi-dérivée f' (au sens de 0.4.6) est une fonction μ-continue par morceaux qui est aussi T-périodique : en tout point où f' est continue, on le démontre comme ci-dessus ; si a est un point de discontinuité de f' (on a donc $f'(a) = (f'(a^-) + f'(a^+))/2$), il suffit alors de remarquer que l'on a $f'(a^-) = \lim_{x\to a^-} f'(x) \stackrel{\star}{=} \lim_{x\to a^-} f'(x+T) = \lim_{y\to(a+T)^-} f'(y)) = f'((a+T)^-)$ et $f'(a^+) = f'((a+T)^+)$, ainsi $f'(a) = f'(a+T)$. Dans l'égalité $\stackrel{\star}{=}$ ci-dessus, on a utilisé la périodicité de f' aux points où f' est continue.

0.4.8 Les paragraphes 0.4.5, 0.4.6 et 0.4.7 seront essentiellement utiles dans VIII.5, la section consacrée aux séries de Fourier ; en fait, dans VIII.5, on s'intéressera aux fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques et μ-continues par morceaux ...tout ce qui a été dit ici dans ces trois derniers paragraphes pour des fonctions à valeurs réelles est encore vrai pour de telles fonctions à valeurs complexes, sachant que toute fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ se décompose en sa partie réelle f et sa partie imaginaire g (*i.e.* s'écrit $f + ig$) où $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On se ramène donc au cas réel, en convenant (le symbole $|z|$, qui est le module dans le cas complexe, remplaçant la valeur absolue $|x|$ du cas réel) que $f + ig$ est continue (resp. dérivable,

μ-continue par morceaux, μ-C^1 par morceaux ...etc) ssi f et g le sont (on écrit $(f+ig)' = f'+ig'$, avec des dérivées ou des quasi-dérivées selon le contexte). De la même façon, $f+ig$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ ssi f et g le sont, et l'on pose $\int_a^b (f(x)+ig(x))dx = \int_a^b f(x)dx + i\int_a^b g(x)dx$, qui est donc un nombre complexe.

De façon similaire au cas réel, on note $C_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (resp. $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$) l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques et continues (resp. et μ-continues par morceaux) ; c'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Sur ces espaces, l'intégrale possède toutes les propriétés rappelées dans le cas réel.

Chapitre premier
LES ESPACES METRIQUES

1. ESPACES METRIQUES

1.1.1 Définition : Soit E un ensemble et $d : E \times E \longrightarrow [0, +\infty[$ une application vérifiant les axiomes :

(D_1) $\forall x, y \in E$ $\quad d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (réflexivité),

(D_2) $\forall x, y \in E$ $\quad d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie),

(D_3) $\forall x, y, z \in E$ $\quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire) ;

une telle application d s'appelle une *distance* ou *métrique* sur E et le couple (E, d) s'appelle un *espace métrique* (plus rapidement, E est un espace métrique signifiera que E est un ensemble muni d'une distance que l'on ne spécifie pas).

1.1.2 Définition : Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E ; on dit que A est *bornée* dans (E, d) (ou *d-bornée* dans E) s'il existe un réel $\alpha > 0$ vérifiant $d(x, y) \leq \alpha$ pour tout $x, y \in A$ (on peut remplacer l'inégalité large par une inégalité stricte). En particulier, si l'espace E est d-borné, on dit que la distance d est *bornée* (toute partie de E est alors d-bornée).

Soit $f : E \longrightarrow E'$ une application, où E un ensemble et (E', d') un espace métrique ; on dit que f est d'-bornée si son image $f(E)$ est d'-bornée dans E'.

1.1.3 Proposition : Une partie A d'un espace métrique (E, d) est d-bornée ssi son *diamètre* $\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y)$ est fini.

Preuve : Comme $d(x, y) \geq 0$ pour tout $x, y \in E$, on a $\delta(A) \geq 0$. Par ailleurs, par définition de la borne supérieure (voir 0.2.4), on a l'équivalence : $d(x, y) \leq \alpha$ pour tout $x, y \in A$ ssi $\sup_{x,y \in A} d(x, y) \leq \alpha$ ssi $\delta(A) \leq \alpha$. □

1.1.4 Exemples (en exercices) : Bien sûr, toute partie incluse dans une partie bornée est bornée ! Sur $\mathbb{R}$, $d_u(x, y) = |x - y|$ (la *distance usuelle* de $\mathbb{R}$) ; les parties d_u-bornées de $\mathbb{R}$ sont exactement celles qui sont incluses dans un intervalle borné, *i.e* celles qui sont bornées au sens usuel de 0.2.2 ; par suite les applications de but $\mathbb{R}$ qui sont d_u-bornées sont celles qui sont bornées au sens usuel (voir 0.2.2). Sur un ensemble E quelconque, $d_0(x, y) = 0$ ou 1, selon que $x = y$ ou non (la *distance discrète* ; un ensemble muni de la distance discrète s'appelle un *espace discret*). On considérera aussi les distances $\delta_1(x, y) = \inf(1, d(x, y))$ et $\delta_2(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$, sur un ensemble E, muni *a priori* d'une distance d. Les distances d_0, δ_1 et δ_2 sont bornées.

Si (E, d) est un espace métrique et A une partie non vide de E, alors, pour tout $x \in E$, on définit $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$, la "distance" de x à A (c'est un réel positif puisqu'une distance est positive ; voir 0.2.4). Elle vérifie l'inégalité $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ pour tout $x, y \in E$. Calculer $d_u(a, [a, b[)$, $d_u(b, [a, b[)$,

$d_u(x,\mathbb{Q})$ et $d_u(x,\mathbb{Q}^c)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; pour chacune des parties $A = [a,b[, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q}^c$ précédentes, donner un réel x dont la distance à cette partie n'est atteinte en aucun point de A (*i.e* pour lequel, il n'existe aucun point $y \in A$ vérifiant $d_u(x,A) = d_u(x,y)$) ; donner une partie de $\mathbb{R}$ et un réel dont la distance à cette partie est atteinte en plusieurs points (en voir un autre exemple dans **1.4.4**). On verra dans **1.4.8**, **5.1.21** et **8.1.3** des conditions suffisantes pour que la distance d'un point à une partie soit atteinte.

1.1.5 Proposition : Soit E un ensemble, (F,d) un espace métrique et $f : E \longrightarrow F$ une application injective. On considère l'application $d_f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $d_f(x,y) = d(f(x),f(y))$. On définit ainsi une distance sur E (souvent appelée *distance image réciproque*) qui est bornée ssi l'ensemble $f(E)$ est d-borné dans F (*i.e* ssi f est d-bornée).

Preuve : D'abord, $(x,y) \mapsto d_f(x,y)$ est une application $E \times E \longrightarrow [0,+\infty[$. De plus, elle vérifie $d_f(x,y) = 0$ ssi $d(f(x),f(y)) = 0$ ssi $f(x) = f(y)$ (car d est une distance) ssi $x = y$ (car f est injective). La symétrie de d_f résulte immédiatement de celle de d ; enfin, $d_f(x,z) = d(f(x),f(z)) \leq d(f(x),f(y)) + d(f(y),f(z)) = d_f(x,y) + d_f(y,z)$ (en utilisant l'inégalité triangulaire pour d).

On remarque que $\delta(f(E)) = \sup_{x,y\in E} d(f(x),f(y)) = \sup_{x,y\in E} d_f(x,y) = \delta_f(E)$, où $\delta_f(E)$ désigne le diamètre de E pour la distance d_f. On a donc bien l'équivalence : d_f est bornée ssi $f(E)$ est d-bornée, d'après 1.1.3. □

1.1.6 Corollaire : Soit (E,d) un espace métrique et A une partie de E. On définit sur A une *distance induite* (par d) en posant $d_A(x,y) = d(x,y)$ pour tout $x,y \in A$. Cette distance induite est bornée ssi A est d-borné dans E.

Preuve : On applique 1.1.5 à l'injection canonique $j_A : A \longrightarrow E$ (voir 0.1.5) : en effet, d_A n'est autre que d_f pour $f = j_A$. □

1.1.7 Définition : Soit (A,δ) et (E,d) deux espaces métriques ; on dira que (A,δ) est un *sous-espace métrique* de (E,d) si A est une partie de E et si la distance δ sur A est la distance d_A, induite sur A par d (plus rapidement, l'expression *A est un sous-espace de E* signifiera que E est un espace métrique et que A est une partie de E, munie de la distance induite par celle de E).

1.1.8 Exemples (*en exercices*) : $d(x,y) = |\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y|$ est une distance bornée sur $\mathbb{R}$; $|x-y|$ est une distance (la distance usuelle induite) bornée sur $[0,1]$, encore notée d_u. Soit $f : (E,\gamma) \longrightarrow (F,\delta)$ une application ; alors $\widehat{d}(x,y) = \gamma(x,y) + \delta(f(x),f(y))$ est une distance sur E (ici, on n'a pas besoin que f soit injective, contrairement à 1.1.5) ; en particulier (en prenant $f = id_E$), la somme de deux distances sur E est une distance sur E.

1.1.9 Proposition : Soit $(E_1,\delta_1),\ldots,(E_n,\delta_n)$ des espaces métriques. On définit sur l'ensemble produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ les trois distances suivantes : $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n \delta_i(x_i,y_i)$, $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\delta_i(x_i,y_i))^2}$, ainsi que $d_\infty(x,y) = \sup_{i=1}^n \delta_i(x_i,y_i)$, où $x = (x_1,\ldots,x_n)$ et $y = (y_1,\ldots,y_n)$ sont des éléments de E. Ces distances seront appelées les *distances produit* sur E.

Preuve : D'abord, on définit ainsi des applications $d_p : E \times E \longrightarrow [0,+\infty[$, avec $p = 1,2,\infty$. Dans chacun des trois cas (*i.e.* pour $p = 1,2,\infty$), on a $0 \leq \delta_i(x_i,y_i) \leq d_p(x,y)$ pour $i = 1,2,\ldots,n$; par suite $d_p(x,y) = 0$ ssi $\delta_i(x_i,y_i) = 0$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$ ssi $x_i = y_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ (car les δ_i sont des distances) ssi $x = y$. La symétrie des d_p allant de soi (car les δ_i sont symétriques), il reste à prouver l'inégalité triangulaire pour les d_p : soit $z = (z_1, \ldots, z_n) \in E$, et posons, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $a_i = \delta_i(x_i, y_i)$, $b_i = \delta_i(y_i, z_i)$ et $c_i = \delta_i(x_i, z_i)$; les a_i, b_i, c_i sont donc des réels positifs qui vérifient $c_i \leq a_i + b_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$. On peut donc écrire :

- $d_1(x, z) = \sum_i c_i \leq \sum_i (a_i + b_i) = \sum_i a_i + \sum_i b_i = d_1(x, y) + d_1(y, z)$.

- $d_2^2(x, z) = \sum_i c_i^2 \leq \sum_i (a_i + b_i)^2 = \sum_i a_i^2 + \sum_i b_i^2 + 2\sum_i a_i b_i = d_2^2(x, y) + d_2^2(y, z) + 2\sum_i a_i b_i$. Il reste alors à appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux éléments $u = (a_1, \ldots, a_n)$ et $v = (b_1, \ldots, b_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (voir 1.4.2) : $\sum_i a_i b_i = < u, v > \leq ||u||_2 \; ||v||_2 = \sqrt{\sum_i a_i^2}\sqrt{\sum_i b_i^2}$ (où $|| \; ||_2$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$; voir 1.3.2) ; on obtient donc l'inégalité $d_2^2(x, z) \leq d_2^2(x, y) + d_2^2(y, z) + 2d_2(x, y)d_2(y, z) = \big(d_2(x, y) + d_2(y, z)\big)^2$.

- Utilisons 0.2.4 : $d_\infty(x, z) \leq d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z)$ ssi $c_i \leq d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z)$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$; or ceci est immédiat puisque $c_i \leq a_i + b_i \leq \sup_i a_i + \sup_i b_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$. □

1.1.10 Exemples : Sur $\mathbb{R}^n$, on a par exemple les distances produit $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$, $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ et $d_\infty(x, y) = \sup_{i=1}^n |x_i - y_i|$, que nous appellerons les *distances usuelles* de $\mathbb{R}^n$ (la seconde est la *distance euclidienne* bien connue) ; pour $n = 1$, elles donnenet toutes la distance usuelle d_u sur $\mathbb{R}$.

1.1.11 Remarques (*en exercices*) : En fait, on peut définir sur $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ (avec les notations de 1.1.9), pour tout $p \in [1, \infty[$, une distance $d_p(x, y) = (\sum_{i=1}^n (\delta_i(x_i, y_i))^p)^{1/p}$.

Soit d une distance bornée sur $\mathbb{R}$. L'expression $\delta(x, y) = \sum_{n=0}^\infty d(x_n, y_n)/2^n$ définit une distance bornée sur l'espace $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ des suites de réels (ici, $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$; voir 0.1.3). On dira encore que δ est une *distance produit* sur $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, qui est un produit infini (voir 4.4.13).

2. BOULES DANS UN ESPACE METRIQUE

Soit (E, d) un espace métrique.

1.2.1 Définition : Pour tout $x \in E$ et tout réel $r > 0$, on définit les *d-boules* de centre x et de rayon $r > 0$ suivantes : la d-boule *ouverte* $B_d(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) < r\}$, et la d-boule *fermée* $B'_d(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) \leq r\}$ (on peut omettre l'indice d quand il n'y a pas d'ambiguïté sur la distance). Bien sûr, on a l'inclusion $B_d(x, r) \subset B'_d(x, r)$ pour tout $x \in E$ et tout réel $r > 0$.

1.2.2 Proposition : Une partie A de E est d-bornée ssi elle est incluse dans une d-boule ouverte ou fermée.

Preuve : $\Longrightarrow$: Supposons A d-bornée et non vide ; se référant à 1.1.2, on sait qu'il existe un réel $\alpha > 0$ vérifiant $d(x, y) \leq \alpha$ pour tout $x, y \in A$. Fixons un $x \in A$; on a donc bien $y \in B'(x, \alpha)$ pour tout $y \in A$, *i.e* $A \subset B'(x, \alpha)$ (*a fortiori*, $A \subset B(x, \alpha')$ où $\alpha' > \alpha$).

$\Longleftarrow$: S'il existe un réel $r > 0$ et un $c \in E$ tels que l'on ait $A \subset B'_d(c, r)$, on a $d(y, c) \leq r$ pour tout $y \in A$, et donc aussi $d(x, y) \leq d(x, c) + d(c, y) \leq 2r$ pour

tout $x, y \in A$. Par suite, A est d-bornée. □

1.2.3 Exemples (*en exercices*) : Les d_u-boules ouvertes (resp. fermées) de $\mathbb{R}$ sont les intervalles bornés ouverts (resp. fermés) ; les d_p-boules de $\mathbb{R}^2$ pour $p = 1, 2, \infty$ sont comme dans la figure 1 :

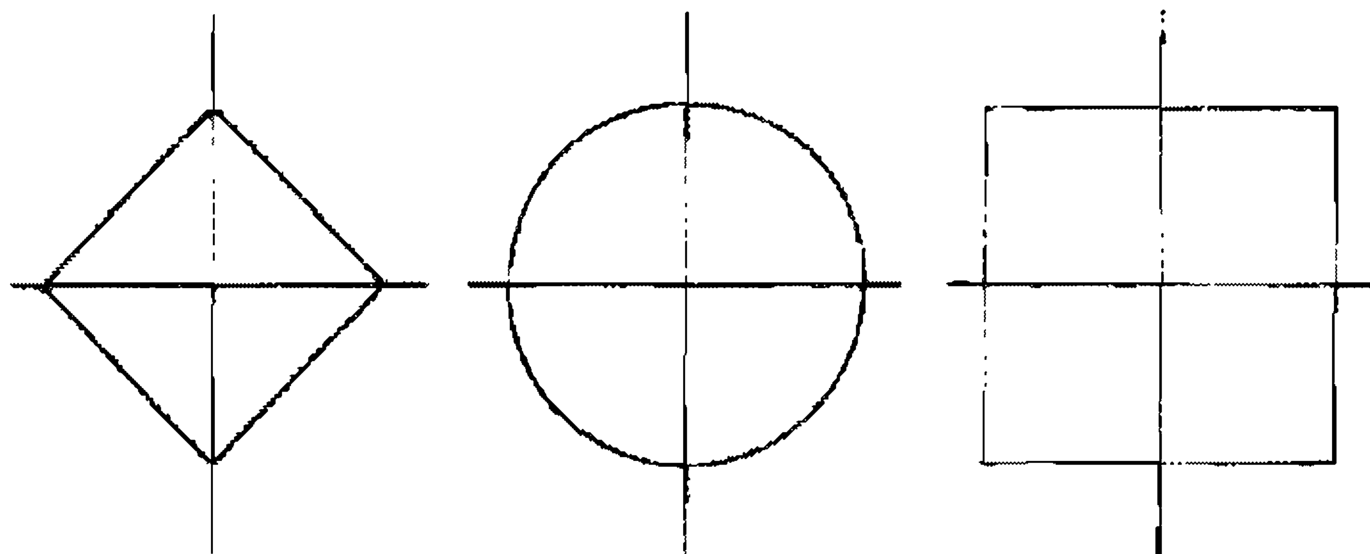


Figure 1 (1.2.3)

Les d_0-boules d'un espace discret E sont E et tous les singletons.

Si $f : E \longrightarrow (F, d)$ est une application injective, on a l'égalité $B_{d_f}(x, r) = \overset{-1}{f}(B_d(f(x), r))$ (voir 0.1.7 et 1.1.5 pour les notations) ; par exemple, pour $f = \text{Arctg} : \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$, les d_f-boules ouvertes sont tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ (bornés ou non) (figure 2).

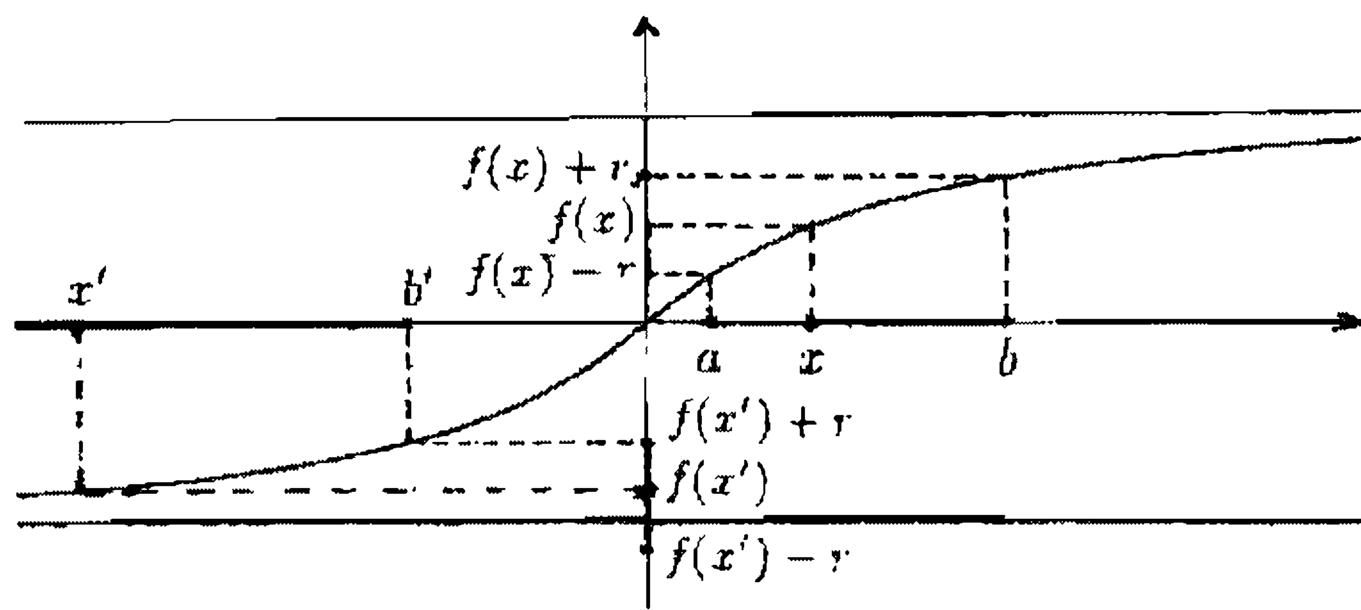


Figure 2 (1.2.3)

Faire la même étude pour le prolongement de Arctg à $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (en posant $\text{Arctg}(+\infty) = \pi/2$ et $\text{Arctg}(-\infty) = -\pi/2$; se reporter à 0.2.5 pour les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$) ; par la suite, on notera $\overline{d}$ la distance "image réciproque" sur $\overline{\mathbb{R}}$, définie par ce prolongement.

3. ESPACES VECTORIELS NORMES (e.v.n.)

Un cas particulier important de distance est celui des distances qui *dérivent d'une norme* (c'est le cas des distances usuelles de $\mathbb{R}^n$ données dans 1.1.10), c'est-à-dire qu'elles sont définies sur un espace vectoriel et s'écrivent $d(x, y) = N(x - y)$, où N est une norme sur cet espace vectoriel (voir rappels ci-dessous).

1.3.1 Définition : Soit E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel et $N : E \longrightarrow [0,+\infty[$ une application vérifiant les axiomes :

(N_1) $\forall x \in E$ $N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
(N_2) $\forall x \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,
(N_3) $\forall x, y \in E$ $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire) ;

une telle application N s'appelle une *norme* sur E (elle vérifie donc $N(-x) = N(x)$ pour tout $x \in E$), et on dira que le couple (E, N) est un *espace (vectoriel) normé* ou, plus rapidement, que c'est un *e.v.n.*.

1.3.2 Exemples (*en exercices*) : Sur $\mathbb{R}$, $|x|$; sur $\mathbb{R}^n$, les *normes usuelles* $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ (la norme euclidienne), $||x||_\infty = \sup_{i=1}^n |x_i|$ (plus généralement, si $(E_1, n_1), \ldots, (E_k, n_k)$ sont des e.v.n., les expressions $||x||_1 = \sum_{i=1}^k n_i(x_i)$, $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^k n_i^2(x_i)}$ (la norme euclidienne), $||x||_\infty = \sup_{i=1}^k n_i(x_i)$ définissent des normes (dites *produit*) sur l'espace vectoriel produit $E_1 \times \cdots \times E_k$ (voir DEUG)).

1.3.3 Remarque (*en exercice*) : Comme dans 1.1.11, on peut définir sur $E = E_1 \times \cdots \times E_k$ (avec les notations de 1.3.2), pour tout $p \in [1, \infty[$, une norme $||x||_p = (\sum_{i=1}^k (n_i(x_i))^p)^{1/p}$.

1.3.4 Proposition Soit E un espace vectoriel, (F, N) un e.v.n. et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire injective. On considère l'application $N_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $N_f(x) = N(f(x))$. On définit ainsi une norme sur E, souvent appelée *norme image réciproque*. En particulier, si E est un sous-espace vectoriel de F et si $j : E \longrightarrow F$ est l'injection canonique (voir 0.1.5), N_j est la *norme induite* par N sur E (définie par $N_j(x) = N(x)$ pour tout $x \in E$ ...on la note souvent encore N).

Preuve : D'abord, $x \mapsto N_f(x)$ est une application $E \longrightarrow [0, +\infty[$. De plus, elle vérifie $N_f(x) = 0$ ssi $N(f(x)) = 0$ ssi $f(x) = 0$ (car N est une norme) ssi $x = 0$ (car f est linéaire injective). Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $N_f(\lambda x) = N(f(\lambda x)) = N(\lambda f(x)) = |\lambda| N(f(x)) = |\lambda| N_f(x)$; et $N_f(x+y) = N(f(x+y)) = N(f(x)+f(y)) \leq N(f(x)) + N(f(y)) = N_f(x) + N_f(y)$. □

1.3.5 Corollaire : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $e_1, \ldots, e_n$ une base de E ; alors l'isomorphisme $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$ (où les x_i sont les coordonnées de x sur la base donnée sur E ; voir 0.3.3) définit *une correspondance biunivoque entre les normes sur E et les normes sur $\mathbb{R}^n$*.

Preuve : On applique 1.3.4 aux isomorphismes φ et φ^{-1}. □

1.3.6 Exemples (*en exercices*) : Utilisant 1.3.5 avec les isomorphismes naturels $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $M_{m\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ (voir 0.3.2 et 0.3.3) et les normes usuelles $||\ ||_p$ (avec $p = 1, 2, \infty$) respectivement sur $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^{m\times n}$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ (voir 1.3.2), on construit les normes usuelles sur $\mathbb{C}$, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$, encore notées $||\ ||_p$.

Sur $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, on peut aussi considérer la norme $||A|| = \sup_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (où $A = (a_{ij})$) ; elle correspond à la norme d'opérateur sur l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (si l'on munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ de la norme $||\ ||_\infty$; voir 1.3.9 et 2.4.3) et vérifie $||AB|| \leq ||A||\,||B||$, où $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. Lorsque $m = n$, on peut aussi considérer la norme $||A|| = n \sup_{ij} |a_{ij}|$ qui vérifie la même inégalité.

1.3.7 Remarque (*en exercice*) : Pour sortir du cadre de la dimension finie, on peut encore définir, pour tout $p \in [1, \infty[$, une norme $||x||_p = (\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p)^{1/p}$, ainsi que la norme $||x||_\infty = \sup_i |x_i|$, où $x = (x_i)$ est une suite de réels, nulle à partir d'un certain rang (on rappelle que l'on note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'espace de ces suites : voir 0.1.3). Utilisant l'isomorphisme naturel $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ décrit dans 0.3.3, on en déduit, toujours grâce à 1.3.5, des normes $|| \ ||_p$ sur l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, pour tout $p \in [1, \infty]$.

En fait, pour chaque p fixé dans $[1, \infty]$, la norme $|| \ ||_p$ se prolonge de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ à l'espace $l^p = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_i |x_i|^p < +\infty\}$, si $p \in [1, \infty[$, ainsi qu'à l'espace l^∞ des suites bornées, si $p = \infty$. Enfin, si p et q sont deux réels vérifiant $1 \leq p \leq q$, on a les inclusions $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \subset l^p \subset l^q \subset l^\infty \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1.3.8 Proposition : Posons $||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$, $||f||_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2 dx}$ et $||f||_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$, où f est une fonction continue sur $[0, 1]$; ces $||f||_p$ définissent des normes sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0, 1]$.

Preuve : Rappelons que toute fonction continue est bornée et Riemann-intégrable sur tout intervalle fermé et borné (ici, borné signifie borné au sens usuel, *i.e* d_u-borné : voir 0.4.1, 0.4.3 et 1.1.4) ; en appliquant ceci à $|f|$ et f^2, on obtient que, pour $p = 1, 2, \infty$, les $||f||_p$ sont bien définies et sont des éléments de $[0, +\infty[$, pour tout $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Prouvons d'abord que les deux premières expressions données définissent des normes. Pour l'axiome (N_1), on applique la dernière proposition de 0.4.3 à $|f|$ et à f^2. Dans ces deux cas, les axiomes (N_2) et (N_3) résultent du fait que la valeur absolue est une norme et de la linéarité de l'intégrale (pour l'inégalité triangulaire de $|| \ ||_2$ on procède comme pour celle de la distance euclidienne sur un produit (voir 1.1.9), en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\int_0^1 f(x)g(x)dx = \langle f, g \rangle \overset{*}{\leq} ||f||_2 ||g||_2$ (voir 1.4.2) ; on obtient donc $||f+g||_2^2 = ||f||_2^2 + ||g||_2^2 + 2\int_0^1 f(x)g(x)dx \overset{*}{\leq} (||f||_2 + ||g||_2)^2$; voir 1.4.3).

Pour la troisième expression, fixons $f, g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'axiome (N_1) résulte du fait que l'on a $0 \leq |f(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = ||f||_\infty$ pour tout $x \in [0, 1]$. Pour l'axiome (N_2), observant que l'on a $|\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)| \leq |\lambda| ||f||_\infty$ pour tout $x \in [0, 1]$, on en déduit (voir 0.2.4) l'inégalité $||\lambda f||_\infty \overset{*}{\leq} |\lambda| ||f||_\infty$; par suite, pour $\lambda \neq 0$, on a aussi $||f||_\infty = ||(1/\lambda)(\lambda f)||_\infty \overset{*}{\leq} (1/|\lambda|) ||\lambda f||_\infty$, *i.e* $|\lambda| ||f||_\infty \leq ||\lambda f||_\infty$. On a donc établi l'égalité $||\lambda f||_\infty = |\lambda| ||f||_\infty$ pour tout $\lambda \neq 0$ ... elle est évidemment vraie pour $\lambda = 0$! Reste l'axiome (N_3) : prouver que l'on a $||f+g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$ revient à prouver que l'on a $|f(x)+g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$ pour tout $x \in [0, 1]$ (voir 0.2.4), ce qui est immédiat puisque l'on a $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$ pour tout $x \in [0, 1]$. □

1.3.9 Exemples (*en exercices*) : Soit E un ensemble ; sur $\mathcal{F}_b(E, \mathbb{R})$ (l'espace des fonctions bornées sur E, *i.e* des fonctions $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dont l'image $f(E)$ est d_u-bornée ... voir 0.2.2 et 1.1.4), on considère la norme $||f||_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$, dite *norme de la convergence uniforme* (voir 1.3.10 et 2.1.20). Soit E et F des e.v.n. ; sur l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F, on définit $||u|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||u(x)||$; on montre alors que cela définit une norme (appelée *norme d'opérateur*) si l'on se limite au sous-espace de $\mathcal{L}(E, F)$ formé des u vérifiant

$||u|| < +\infty$ (voir 2.4.3). Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$, on sait que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est isomorphe à $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (par l'isomorphisme qui associe à tout u sa matrice $A_u = (a_{ij})$ dans les bases canoniques) ; alors, en munissant $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ de la norme $|| \ ||_\infty$, on a $||u|| < +\infty$ (ce que l'on retrouvera grâce à 2.4.3 et 5.1.29), et, de plus, $||u|| = ||A_u||$, où $||A_u|| = \sup_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (voir 1.3.6).

1.3.10 Remarques : Sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, les normes $|| \ ||_p$ pour $= 1, 2, \infty$ sont respectivement appelées *norme de la convergence en moyenne, de la convergence en moyenne quadratique, de la convergence uniforme*, ce qui sera justifié dans 2.1.14. En fait, pour tout $p \in [1, \infty[$, on peut définir une norme $||f||_p = (\int_0^1 |f(x)|^p dx)^{1/p}$ sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

1.3.11 Proposition : Soit (E, N) un espace normé, et $d : E \times E \longrightarrow [0, +\infty[$ l'application définie par $d(x,y) = N(x-y)$ (en particulier, $d(x,0) = N(x)$). Alors (E, d) est un espace métrique ; on dira que d est *la distance (ou métrique) associée à la norme N* ou que *la distance d dérive de la norme N*.

Preuve : On vérifie les axiomes (D_i) de distance : $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow N(x-y) = 0 \Longleftrightarrow x - y = 0 \Longleftrightarrow x = y$; $d(x,y) = N(x-y) = N(y-x) = d(y,x)$; $d(x,z) = N(x-z) = N((x-y)+(y-z)) \leq N(x-y) + N(y-z) = d(x,y) + d(y,z)$. □

1.3.12 Définition Soit (E, N) un e.v.n. et A une partie de E ; on dit que A est bornée dans (E, N) si elle l'est pour la distance associée à N.

1.3.13 Proposition : Une partie non vide A d'un e.v.n. (E, N) est bornée ssi il existe un $\alpha > 0$ vérifiant $N(x) \leq \alpha$ pour tout $x \in A$ (on peut remplacer l'inégalité large par une inégalité stricte).

Preuve : On doit prouver l'équivalence : $\exists\alpha > 0 \quad \forall x, y \in A \quad N(x-y) \leq \alpha \Longleftrightarrow \exists\alpha > 0 \quad \forall x \in A \quad N(x) \leq \alpha$.

$\Longrightarrow$: On ne peut le déduire immédiatement en posant $y = 0$, puisque 0 n'est pas forcément dans A. On utilise l'inégalité triangulaire, avec un a fixé dans A : $N(x) = d(x,0) \leq d(x,a) + d(a,0)$; on obtient donc $N(x) \leq \alpha + \beta$ pour tout $x \in A$ (en posant $\beta = d(a,0) = N(a)$).

$\Longleftarrow$: Il suffit d'écrire $d(x,y) \leq d(x,0) + d(0,y) = N(x) + N(y) \leq 2\alpha$ pour tout $x, y \in A$. □

1.3.14 Exemples *(en exercices)* : La distance usuelle d_u dérive d'une norme (la valeur absolue) si l'on se place sur $\mathbb{R}$, mais pas si l'on se restreint à $[0,1]$ (qui n'est pas un espace vectoriel). En fait, bien que l'on ne puisse pas parler de norme induite sur une partie quelconque A d'un e.v.n. (E, N), on peut toujours munir A de la distance induite par la distance, sur E, associée à la norme N.

Les distances usuelles d_p sur $\mathbb{R}^n$ données dans 1.1.10 dérivent bien sûr des normes $|| \ ||_p$ données dans 1.3.2.

La distance $d_1(f,g) = ||f-g||_1$, associée à la norme $|| \ ||_1$, définie, dans 1.3.8, sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, est l'aire de la surface comprise entre les graphes de f et de g, comme dans le dessin de gauche de la figure 3.

Toujours dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, la d_∞-boule fermée de centre f et de rayon r (voir 1.2.1) est l'ensemble des fonctions dont le graphe se trouve dans le "cylindre ondulé, d'axe le graphe de f et de rayon r" comme dans le dessin de droite de la figure 3.

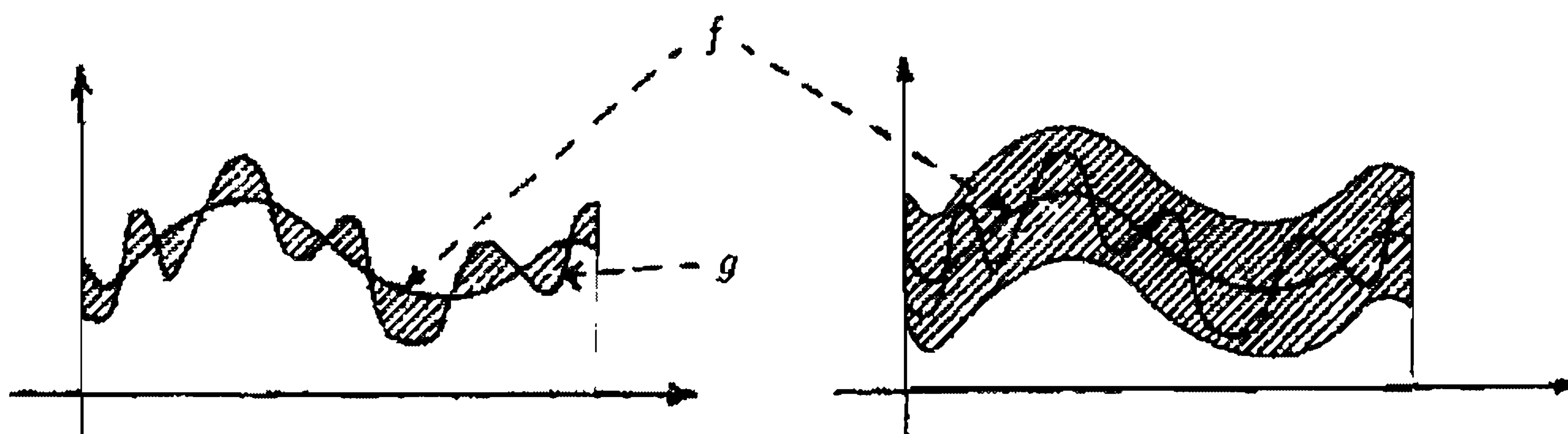


Figure 3 (1.3.14)

On se place sur l'espace vectoriel $C^1([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ (voir 0.4.2) ; alors l'expression $||f|| = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$ définit une norme sur cet espace. Donner sa distance associée.

1.3.15 Remarque : *Attention*, toute distance ne dérive pas d'une norme (bien sûr, la moindre des choses est qu'elle soit définie sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) ; par exemple, une distance bornée (c'est le cas de la distance discrète) ne peut dériver d'une norme, si l'e.v.n. n'est pas réduit à $\{0\}$. En effet :

1.3.16 Proposition : Une norme sur un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ ne peut être bornée.

Preuve : Soit (E,N) un tel e.v.n., et supposons que N est bornée : il existe donc un réel $\alpha > 0$ vérifiant $N(x) \leq \alpha$ pour tout $x \in E$. Fixant un $x \in E - \{0\}$, on aurait $N(nx) \leq \alpha$ et donc aussi $nN(x) \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ... d'où la contradiction. □

1.3.17 Proposition : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et d une distance sur E. Alors d dérive d'une norme sur E ssi d vérifie les axiomes suivants :

(A_1) $\forall x, y \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$,

(A_2) $\forall x, y, a \in E$ $\quad d(x+a, y+a) = d(x,y)$

Preuve : $\Longrightarrow$: Les axiomes (A_1) et (A_2) s'obtiennent facilement, lorsque d dérive d'une norme : en effet, $d(\lambda x, \lambda y) = N(\lambda x - \lambda y) = |\lambda| N(x-y) = |\lambda| d(x,y)$ et $d(x+a, y+a) = N\big((x+a)-(y+a)\big) = N(x-y) = d(x,y)$.

$\Longleftarrow$: On suppose donc que d vérifie les axiomes des distances (D_1), (D_2) et (D_3), et en plus les deux axiomes (A_1) et (A_2). On doit alors montrer que la distance d dérive d'une norme sur E. Si une telle norme N existe, on doit avoir nécessairement $d(x,0) = N(x-0) = N(x)$; posons donc $N(x) = d(x,0)$. Il en résulte immédiatement que d dérive de N, puisque l'on a $d(x,y) \overset{(A_2)}{=} d(x-y, y-y) = d(x-y,0) = N(x-y)$. A ceci près qu'il faut s'assurer que N vérifie les axiomes des normes. Par définition de N, il va de soi que c'est bien une application $E \longrightarrow [0,+\infty[$ et que l'axiome (N_1) est vrai (on a $N(x) = 0 \Longleftrightarrow d(x,0) = 0 \overset{(D_1)}{\Longleftrightarrow} x = 0$). Pour les axiomes (N_2) et (N_3), on écrit $N(\lambda x) = d(\lambda x, 0) = d(\lambda x, \lambda 0) \overset{(A_1)}{=} |\lambda| d(x,0) = |\lambda| N(x)$ et $N(x+y) = d(x+y,0) \overset{(D_3)}{\leq} d(x+y,y) + d(y,0) \overset{(A_2)}{=} d(x,0) + d(y,0) = N(x) + N(y)$; on a ainsi prouvé que N est une norme. □

1.3.18 Exemples (*en exercices*) : Retrouver à l'aide de 1.3.17 que la distance discrète sur $\mathbb{R}$ ne dérive pas d'une norme.

Soit F un sous-espace vectoriel d'un e.v.n. E ; alors, pour tout $x \in E$, tout $y \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $d(\lambda x, F) = |\lambda| d(x, F)$ et $d(x + y, F) = d(x, F)$ (voir 1.1.4 pour la définition de $d(x, F)$).

Pourquoi les expressions $\inf(1, N)$ et $N/(1 + N)$ ne définissent-elles pas une norme, lorsque N est une norme ?

4. ESPACES EUCLIDIENS ET PREHILBERTIENS REELS

Un cas particulier important de norme est celui des normes qui *dérivent d'un produit scalaire*, *i.e.* qui s'écrivent $\sqrt{< x, x >}$ (voir rappels ci-dessous).

1.4.1 Définition : Soit E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel ; on appelle *produit scalaire* sur E une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $E \times E$. C'est donc (voir 0.3.2) une application $<,>: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est linéaire séparément en chacune de ses variables et qui vérifie, pour tout $x, y \in E$: $< x, y > = < y, x >$, $< x, x > \geq 0$, et $< x, x > = 0$ ssi $x = 0$. On dit que le couple $(E, <,>)$ est un *espace préhilbertien* (resp. un *espace euclidien*) si E est un espace vectoriel (resp. un espace vectoriel de dimension finie) et si $<,>$ est un produit scalaire sur E. Plus rapidement, l'expression "E est un espace préhilbertien" signifiera que c'est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Plus généralement, on peut définir des espaces préhilbertiens complexes en remplaçant le corps des réels $\mathbb{R}$ par celui des complexes $\mathbb{C}$ (en voir un exemple dans 8.5.1).

1.4.2 Proposition : Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien ; alors l'expression $||x|| = \sqrt{< x, x >}$ définit une norme sur E qui vérifie, pour tout $x, y \in E$, l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* : $| < x, y > | \leq ||x|| \, ||y||$. On dira que $|| \, ||$ est *la norme associée au produit scalaire* $<,>$, ou que *la norme* $|| \, ||$ *dérive du produit scalaire* $<,>$.

Preuve : Commençons par prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour cela, il suffit de remarquer que, pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a, grâce à la bilinéarité du produit scalaire, $0 \leq ||x+\lambda y||^2 = < x+\lambda y, x+\lambda y > = ||x||^2 + \lambda^2 ||y||^2 + 2\lambda < x, y >$, de sorte que le discriminant de cette équation du second degré en λ est négatif : on obtient ainsi $< x, y >^2 - ||x||^2 ||y||^2 \leq 0$.

Le fait que le produit scalaire est défini positif signifie que $|| \, ||$ est positive et vérifie l'axiome (N_1). De plus, pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $||\lambda x||^2 = < \lambda x, \lambda x > = \lambda^2 < x, x > = \lambda^2 ||x||^2$, et $||x+y||^2 = < x+y, x+y > = ||x||^2 + ||y||^2 + 2 < x, y > \leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x|| \, ||y|| = (||x|| + ||y||)^2$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a donc ainsi prouvé les axiomes (N_2) et (N_3) pour $|| \, ||$. □

1.4.3 Proposition Une norme sur un espace vectoriel dérive d'un produit scalaire sur ce même espace ssi son carré est une forme quadratique.

Preuve : Soit E un espace vectoriel. On utilise la correspondance biunivoque entre les formes bilinéaires symétriques $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ et les formes quadratiques $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ (voir 0.3.2).

Soit alors $|| \, ||$ une norme sur E. Si elle dérive d'un produit scalaire $<,>$, on a $||x||^2 = < x, x >$ pour tout $x \in E$, où $< x, x >$ est la forme quadratique associée au

produit scalaire. Inversement, si elle vérifie $||x||^2 = q(x)$ pour tout $x \in E$, où q est une forme quadratique sur E, on pose $< x, y >= \frac{1}{2}(q(x+y)-q(x)-q(y))$; c'est bien une forme bilinéaire symétrique qui est définie positive, puisque $< x, x >= q(x)$ pour tout $x \in E$. $\square$

1.4.4 Exemples (*en exercices*) : Dans tout espace préhilbertien, on a la "règle de Pythagore" : $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ ssi $< x, y >= 0$, et la "loi du parallélogramme" : $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$, pour tout x, y (en fait, une norme sur un espace vectoriel dérive d'un produit scalaire ssi elle vérifie la loi du parallélogramme).

$N(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2 - 2xy}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

La norme euclidienne $|| \ ||_2$, définie sur $\mathbb{R}^n$ dans 1.3.2, dérive du produit scalaire euclidien $< x, y >= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ de $\mathbb{R}^n$.

La norme $|| \ ||_2$ définie sur $C([0, 1], \mathbb{R})$ dans 1.3.8 dérive du produit scalaire $< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$ sur $C([0, 1], \mathbb{R})$. Elle induit un produit scalaire $< P, Q > = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$ sur l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels ; se référant au résultat qui suit, ce produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ peut être présenté comme un produit scalaire "image réciproque", du produit scalaire sur $C([0, 1], \mathbb{R})$, par l'homomorphisme d'algèbres (donc linéaire) injectif $\gamma : \mathbb{R}[X] \longrightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$ qui, à tout polynôme, associe sa restriction (en tant que fonction polynomiale ... voir 0.3.5) à $[0, 1]$.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire injective, où E est un espace vectoriel et $(F, <, >)$ un espace préhilbertien. Alors l'application $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto < f(x), f(y) >$ est un produit scalaire "image réciproque" sur E. On peut utiliser ceci pour prouver que $tr({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$ (alors que $tr(AB)$ n'en est pas un).

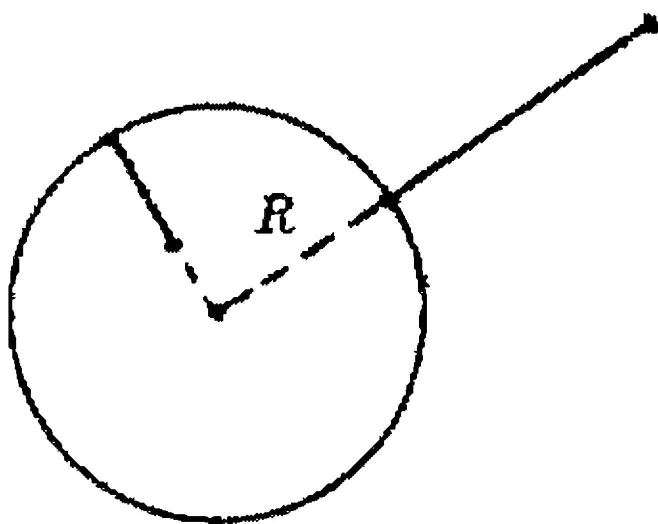


Figure 4 (1.4.4)

Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$ le cercle de $\mathbb{R}^2$, centré en l'origine O et de rayon $R > 0$; alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $d_2((x, y), C)$ est atteinte en un point (pas forcément unique) de C (voir 1.1.4) et l'on a $d_2((x, y), C) = |\sqrt{x^2 + y^2} - R|$ (figure 4).

1.4.5 Remarque (*en exercice*) : Se référant aux e.v.n. l^p introduits dans 1.3.7, le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$, rappelé dans 1.4.4, se prolonge à l^2 qui est donc un espace préhilbertien. En utilisant par exemple la loi du parallélogramme mentionnée dans 1.4.4, on peut montrer que, parmi tous les l^p, seul l'espace l^2 est préhilbertien.

1.4.6 Définitions : Soit H un espace préhilbertien; on définit une notion d'*orthogonalité* dans H : $x \perp y \iff <x,y>= 0$, et $A^\perp = \{x \in H \mid \forall a \in A \quad x \perp a\}$ (avec, bien sûr, $x, y \in H$ et $A \subset H$). On dit que x et y sont *orthogonaux* lorsque $x \perp y$, et que $A^\perp$ est l'*orthogonal* de A ; on dira que x est orthogonal à A, ce que l'on écrira $x \perp A$, lorsque $x \in A^\perp$ (bien sûr, $x \in A \cap A^\perp$ implique $x = 0$) ; enfin, si $B \subset H$, on dira que A et B sont orthogonales, ce que l'on écrira $A \perp B$, lorsque tout élément de A est orthogonal à tout élément de B (*i.e.* lorsque l'on a $A \subset B^\perp$, ce qui équivaut à $B \subset A^\perp$).

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de H. On dit que c'est *une famille orthogonale* si elle vérifie $<e_i, e_j>= 0$ pour tout $i, j \in I$; toute famille orthogonale, formée d'éléments non nuls, est linéairement indépendante. On dit que c'est une *famille orthonormée* si elle est orthogonale et vérifie de plus $||e_i|| = 1$ pour tout $i \in I$. Une famille orthonormée $(e_i)_{i \in I}$ est une *base orthonormée* si elle engendre linéairement H, *i.e.* si $H = Vect(\{e_i \mid i \in I\})$, le sous-espace vectoriel de H engendré par les e_i (voir 0.3.3). On verra dans 8.4.15 qu'il n'existe pas toujours de base orthonormée en dimension infinie. Par contre, tout espace euclidien possède des bases orthonormées (on les construit à partir d'une base quelconque par le procédé *d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*; en voir un exemple ci-dessous dans 1.4.9).

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée d'un espace euclidien, son produit scalaire s'écrit $<x, y> \overset{*}{=} \sum_{i=1}^n x_i y_i$, où les x_i et les y_i sont les coordonnées de x et y sur cette base ; en fait, en posant $y = e_i$, on voit que les coordonnées d'un x quelconque sur cette base orthonormée s'écrivent $x_i =< x, e_i >$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. En faisant $x = y$ dans l'égalité $\overset{*}{=}$ ci-dessus, on obtient $||x||^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

1.4.7 Exemples (*en exercices*) : Pour toute partie A de H, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de H qui vérifie $A^\perp = (Vect(A))^\perp$ (où $Vect(A)$ est le sous-espace vectoriel de H engendré par A) ; en particulier, si $e_1, \ldots, e_n$ est une base d'un sous-espace F (de dimension finie n) de H, on a l'équivalence : $x \perp F \iff x \perp e_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. De plus, on a $H^\perp = \{0\}$, $\{0\}^\perp = H$ et $A \subset A^{\perp\perp}$ ...et aussi l'implication $A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp$, lorsque B est une autre partie de H.

1.4.8 Théorème (de projection orthogonale) : Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien H, et x un point de H. Alors (voir 1.1.4) la "distance" $d(x, F)$ est atteinte en un unique point de F : plus précisément, il existe un unique élément de F, appelé *projection orthogonale* de x sur F, et noté $p_F(x)$, vérifiant la propriété suivante : $d(x, F) = d(x, p_F(x))$; l'application $p_F : H \longrightarrow H$ ainsi définie est appelée la *projection orthogonale* ou le *projecteur orthogonal* sur F (elle est linéaire et vérifie $p_F \circ p_F = p_F$). De plus, on a $F \oplus F^\perp = H$.

Preuve : Supposons que F est de dimension n et soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormée dans F (voir 1.4.6) ; montrons que $p_F(x) = \sum_{i=1}^n < x, e_i > e_i$. Posant $y_x = \sum_{i=1}^n < x, e_i > e_i$, on remarque que $x - y_x \in F^\perp$ (*i.e.* $x - y_x \perp e_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$), ce qui prouve déjà que l'on a $H = F + F^\perp$ (puisque, pour tout $x \in H$, on a $x = y_x + (x - y_x)$, avec $y_x \in F$) et même que $H = F \oplus F^\perp$, puisque $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Bien sûr, on a $d(x, F) \leq d(x, y_x)$, puisque $y_x \in F$. Pour prouver l'inégalité inverse, on doit vérifier que l'on a $||x - y_x|| \leq ||x - y||$ pour tout $y \in F$; pour cela, on applique la règle de Pythagore : $||x - y_x||^2 + ||y_x - y||^2 = ||x - y||^2$; on a donc obtenu l'égalité $d(x, y_x) = d(x, F)$. Le fait que y_x soit le seul élément y de

F qui vérifie $d(x,y) = d(x,F)$ résulte du fait que, d'après la règle de Pythagore, on a $\|x - y_x\| = \|x - y\|$ ssi $y = y_x$, pour tout $y \in F$. On a ainsi obtenu une correspondance $x \mapsto y_x$ qui définit une application $p_F : H \longrightarrow H$, où $p_F(x) = y_x$ est l'unique élément de F vérifiant l'égalité $d(x, p_F(x)) = d(x,F)$; la linéarité de p_F résulte de la définition même de $p_F(x) = y_x$.

Enfin, l'égalité $p_F \circ p_F = p_F$ résulte du fait que, pour tout $x \in H$, on a $p_F(x) \in F$ et donc aussi $0 = d(p_F(x), F) = \|p_F(x) - p_F(p_F(x))\|$. □

1.4.9 Exemples (*en exercices*) : Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien H (on reprend les notations de 1.4.8) ; alors, pour tout $x \in H$, la projection orthogonale $p_F(x)$ de x sur F est caractérisée par le fait que c'est l'unique élément de F vérifiant $x - p_F(x) \perp F$. De plus, on a $F^{\perp\perp} = F$ (ça n'est pas toujours vrai lorsque F n'est pas de dimension finie : voir un exemple ci-dessous).

Donner l'orthogonal $F^{\perp}$ du sous-espace F de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ défini par l'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$, où $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Dans l'espace préhilbertien $E = C([0,1],\mathbb{R})$ cité dans 1.4.4, on considère le sous-espace $F = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$; il vérifie $F^{\perp} = \{0\}$, et donc aussi $F^{\perp\perp} \neq F$ et $F \oplus F^{\perp} \neq E$.

Dans l'espace préhilbertien $E = C([0,1],\mathbb{R})$ cité ci-dessus, on considère d'une part le sous-espace K formé des fonctions constantes ; on a $K^{\perp} = \{f \in E \mid \int_0^1 f(x)dx = 0\}$ et $p_K(f) = \int_0^1 f(x)dx$ pour tout $f \in E$ (on identifie toute fonction constante sur a au réel a). On considère aussi d'autre part le sous-espace vectoriel G engendré par les fonctions g_1 et g_2 définies par $g_1(x) = x$ et $g_2(x) = x^2$ pour tout $x \in [0,1]$; calculer la projection orthogonale sur G de la fonction $f \in E$, définie par $f(x) = x \log x$ $\big(p_G(f)$ est donc la meilleure approximation de f par un polynôme de degré 2 sans terme constant$\big)$ et calculer $d(f,G)$.

Soit H un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de dimension finie, A une partie non vide de F, $x \in H$; on a alors $d^2(x,A) = \|x - p_F(x)\|^2 + d^2(p_F(x), A)$. Par suite, si D est l'axe des z dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, alors l'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid d_2((x,y,z), D) = r\}$ (où r est un réel > 0) est le cylindre, noté Cyl, d'équation $x^2 + y^2 = r^2$ (figure 5). De même, si $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2$ et $z = 0\}$, alors l'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid d_2((x,y,z), C) = r\}$ (où $0 < r < R$) est la surface de $\mathbb{R}^3$ ayant pour équation $(\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2$; une telle surface s'appelle un *tore* et sera noté $\mathbf{T}$ ici. On en donne une représentation dans la figure 5.



Figure 5 (1.4.9)

1.4.10 Remarques : La définition du tore $\mathbf{T}$ donnée dans 1.4.9 nous en donne une vision géométrique : c'est le lieu des points situés à une distance r d'un cercle horizontal, centré en l'origine et de rayon R : il a donc la forme d'un pneu, d'une bouée ... voir la **figure** 5. Ceci est en fait corroboré par le fait que l'équation de ce tore $\mathbf{T}$ ne dépend de x, y que par l'expression $x^2 + y^2$; ainsi $\mathbf{T}$ est une *surface de révolution*, *i.e.* elle est engendrée par la rotation, autour de l'axe des z, du cercle d'équation $(x - R)^2 + z^2 = r^2$ (trace du tore sur le demi-plan "$y = 0$ et $x > 0$"). Ceci sera encore justifié par la présentation que l'on donnera du tore $\mathbf{T}$ dans 4.4.6 et 4.4.7.

On verra, plus généralement dans 8.1.3, que l'on a une projection orthogonale sur tout sous-espace complet F d'un espace préhilbertien H.

5. COMPARAISON METRIQUE DES DISTANCES

Soit d et d' deux distances sur un ensemble E.

1.5.1 Définitions : On dit que d et d' sont *métriquement comparables* s'il existe un réel $\alpha > 0$ vérifiant $d \leq \alpha d'$ ou $d' \leq \alpha d$ *i.e.* tel que l'on ait $d(x, y) \leq \alpha d'(x, y)$ pour tout $x, y \in E$ ou $d'(x, y) \leq \alpha d(x, y)$ pour tout $x, y \in E$ (c'est le cas si d et d' dérivent de normes N et N' (E est alors un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) qui sont *comparables i.e.* pour lesquelles il existe un réel $\alpha > 0$ vérifiant $N \leq \alpha N'$ ou $N' \leq \alpha N$ *i.e.* tel que l'on ait $N(x) \leq \alpha N'(x)$ pour tout $x \in E$ ou $N'(x) \leq \alpha N(x)$ pour tout $x \in E$).

On dit que d et d' sont *métriquement équivalentes* et l'on écrit $d \overset{Met}{\sim} d'$ s'il existe deux réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ vérifiant $d \leq \alpha d'$ et $d' \leq \beta d$ (c'est le cas si d et d' dérivent de normes N et N' (E est alors un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) qui sont *équivalentes*, ce que l'on écrit $N \sim N'$, *i.e.* pour lesquelles il existe deux réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ vérifiant $N \leq \alpha N'$ et $N' \leq \beta N$).

Il est facile de vérifier que les relations $d \overset{Met}{\sim} d'$ et $N \sim N'$ sont des relations d'équivalence (voir 0.1.4).

1.5.2 Proposition : Supposons que l'on ait $d \leq \alpha d'$ avec $\alpha > 0$; alors toute partie d'-bornée est d-bornée (il en résulte que, si d' est bornée, alors d l'est aussi). En particulier, deux distances métriquement équivalentes sur un même ensemble ont les mêmes parties bornées.

Preuve : Soit A une partie d'-bornée de E, *i.e.* telle qu'il existe un $\beta > 0$ vérifiant $d'(x, y) \leq \beta$ pour tout $x, y \in A$; on a alors *a fortiori* $d(x, y) \leq \alpha\beta$ pour tout $x, y \in A$, ce qui fait que A est aussi d-bornée. □

1.5.3 Remarque : On pouvait aussi obtenir 1.5.2 à l'aide de 1.2.2, en utilisant le fait que pour tout $x \in E$ et tout $r' > 0$, on a $B_{d'}(x, r') \subset B_d(x, \alpha r')$; autrement dit, toute d-boule $B_d(x, r)$ contient une d'-boule de même centre : en l'occurrence $B_{d'}(x, r/\alpha)$.

1.5.4 Exemples (*en exercices*) : Sur $\mathbb{R}$, les distances usuelle et discrète (*i.e.* d_u et d_0) ne sont pas métriquement comparables (mais elles le sont sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{N}$).

Sur $\mathbb{R}$ les distances d_u et $d(x, y) = |\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y|$ (voir 1.1.8) ne sont pas

Soit (E, d) un espace métrique ; les distances $\delta_1 = \inf(1, d)$ et $\delta_2 = d/(1+d)$ sont métriquement équivalentes entre elles (on a $\delta_2 \leq \delta_1 \leq 2\delta_2$) mais ne sont pas métriquement équivalentes à d, si d n'est pas bornée (bien que l'on ait $\delta_2 \leq \delta_1 \leq d$).

1.5.5 Proposition : Soit $(E_1, \delta_1), \ldots, (E_n, \delta_n)$ des espaces métriques et considérons les trois distances produit d_1, d_2 et d_∞ définies sur l'ensemble produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans 1.1.9. Ces trois distances sont métriquement équivalentes : on a les inégalités $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq n d_\infty$.

Preuve : Résulte du fait que, pour des nombres positifs (c'est le cas ici des $\delta_i(x_i, y_i)$) a_i, on a $\sup_i a_i \leq \sum_i a_i \leq n \sup_i a_i$ et $(\sup_i a_i)^2 = \sup_i a_i^2 \leq \sum_i a_i^2 \leq (\sum_i a_i)^2$. □

1.5.6 Définition : Avec les notations de 1.5.5, l'expression E est un *espace métrique produit* (ou, plus rapidement, est un *espace produit*) signifiera que $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ pour un $n \in \mathbb{N}$ (où chaque E_i est muni d'une distance δ_i) et qu'il est muni de l'une des distances produit d_p de 1.1.9.

1.5.7 Exemples (*en exercices*) : Sur $\mathbb{R}^2$, $d_1((x,y),(x',y')) = d_0(x,x') + d_0(y,y')$ est une distance métriquement équivalente à la distance discrète d_0. Par contre, $d_\infty((x,y),(x',y')) = \sup(d_0(x,x'), d_0(y,y'))$ est égale à la distance discrète.

Sur $\mathbb{R}^n$ (et donc sur $\mathbb{C}$, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$, d'après 1.3.6), les normes usuelles $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ sont équivalentes : on a $\|\ \|_\infty \leq \|\ \|_2 \leq \|\ \|_1 \leq n\|\ \|_\infty$; c'est encore vrai pour un produit fini d'espaces normés (voir 1.3.2).

Sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, les normes $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ (voir 1.3.8) sont comparables mais non équivalentes (on a $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$).

1.5.8 Remarques (*en exercices*) : On démontrera dans 5.1.23 le résultat important suivant (déjà rencontré en DEUG) : toutes les normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes. On retrouve ainsi que les normes $\|\ \|_p$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$; par contre, les normes $\|\ \|_p$ ne sont plus équivalentes sur l'espace $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ des suites de réels nulles à partir d'un certain rang (et donc aussi sur l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels (voir 1.3.7)), bien que l'on ait $\|\ \|_\infty \leq \|\ \|_q \leq \|\ \|_p$ pour tous réels p, q vérifiant $1 \leq p \leq q$ (et l'on a $\|\ \|_\infty = \lim_p \|\ \|_p$) ...toutes ces propriétés restent vraies dans les l^p. Les espaces $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et $\mathbb{R}[X]$, ainsi que tous les l^p, ne peuvent donc être de dimension finie ; de même, d'après 1.5.7, l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ ne peut être de dimension finie (ce que l'on avait déjà signalé dans 0.3.3).

Enfin, la distance produit $\delta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, y_n)/2^n$ définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans 1.1.11 (ici, on prend $d = \inf(1, d_u)$, voir 1.1.4) est comparable (mais non équivalente) métriquement à d_∞ sur l^∞.

1.5.9 Proposition : Soit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ un espace produit (voir 1.5.6) ; Soit $A \subset E$. Alors A est bornée dans E ssi chacune de ses projections $\pi_i(A)$ est bornée dans E_i (avec $i = 1, 2, \ldots, n$), où $\pi_i : E \longrightarrow E_i$ est la $i^{\grave{e}me}$ projection canonique (elle est définie par $\pi_i(x) = x_i$ pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$).

Preuve : Vus 1.5.2 et 1.5.5, on peut se limiter à le prouver pour d_∞. Il reste donc à exploiter le fait que, pour tout $x, y \in E$, on a l'équivalence $d_\infty(x,y) \leq \alpha \iff \delta_i(x_i, y_i) \leq \alpha$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ (où δ_i désigne la distance de E_i). □

1.5.10 Remarque : Ainsi, une partie A de $\mathbb{R}^n$ est bornée pour l'une quelconque des distances usuelles d_p (avec $p = 1, 2, \infty$) ssi, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, il existe un réel $\alpha_i > 0$ tel que, pour tout $x \in A$, on ait $|x_i| \leq \alpha_i$, ssi il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ et tout $x \in A$, on ait $|x_i| \leq \alpha$ (on peut remplacer partout les $\leq$ par de $<$). On retrouve ainsi que les parties d_p-bornées de $\mathbb{R}^n$ sont exactement les parties incluses dans une d_∞-boule (voir 1.2.2 et 1.5.3).

1.5.11 Exemples (*en exercices*) :
Reconnaître lesquelles sont bornées (pour les distances usuelles) :
$\mathbf{S}^1_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$,
$\mathbf{S}^1_2 \star \mathbf{S}^1_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)^2 = 4x^2\}$,
$El = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 - 2xy = 1\}$,
$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 - 2xy = 1\}$,
$Cyl = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$,
$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ et } y^2 + z^2 = 1\}$,
$\mathbf{T} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$ (où $r, R > 0$).

1.5.12 Remarque On aura remarqué que $\mathbf{S}^1_2$ est un cercle (une *sphère* en dimension 1), $\mathbf{S}^1_2 \star \mathbf{S}^1_2$ la réunion de deux cercles (figure 6), El une ellipse, H une hyperbole, Cyl un cylindre et $\mathbf{T}$ un tore lorsque $0 < r < R$: voir les solutions de 1.5.11, 1.4.9 et 1.4.10, avec la figure 5.

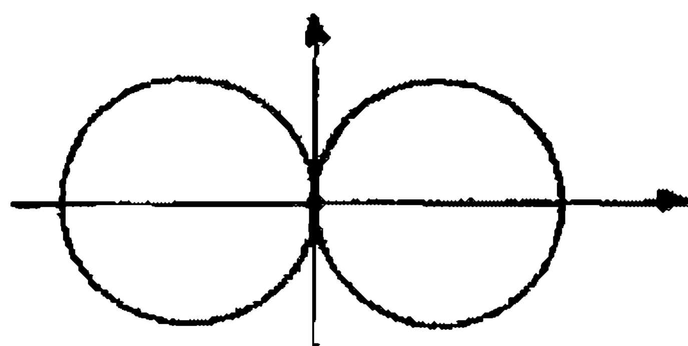


Figure 6 (1.5.12)

6. APPLICATIONS LIPSCHITZIENNES

Quand on parlera d'une application $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$, cela signifiera que (E,d) et (E',d') sont des espaces métriques et que $f : E \longrightarrow E'$ est une application.

1.6.1 Définitions : On dit qu'une application $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ est *k-lipschitzienne* (avec $k > 0$) si elle vérifie : $d'(f(x), f(y)) \leq k d(x,y)$ pour tout $x, y \in E$. On dit aussi que f est *lipschitzienne* s'il existe un $k > 0$ tel que f soit k-lipschitzienne. On dit que f est *contractante* si elle est k-lipschitzienne, avec $0 < k < 1$. On dit que f est une *isométrie* si elle vérifie $d'(f(x), f(y)) = d(x,y)$ pour tout $x, y \in E$ (une isométrie est toujours injective).

1.6.2 Remarque : Bien sûr, si $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ est lipschitzienne, elle le reste si l'on remplace les distances d et d' par deux distances δ et δ' qui leur sont respectivement métriquement équivalentes (voir 1.5.1) ; en fait, en vertu de 1.6.3, il suffit que les identités $id : (E,\delta) \longrightarrow (E,d)$ et $id : (E',d') \longrightarrow (E',\delta')$ soient

lipschitziennes pour que le composé $(E,\delta) \xrightarrow{id} (E,d) \xrightarrow{f} (E',d') \xrightarrow{id} (E',\delta')$ le soit (utiliser 1.6.16).

1.6.3 Proposition : Le composé de deux applications lipschitziennes (resp. de deux isométries) est une application lipschitzienne (resp. une isométrie).

Preuve : En effet, si $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ et $g : (E',d') \longrightarrow (E'',d'')$ sont respectivement α et β-lipschitziennes, on peut écrire pour tout $x, y \in E$, $d''\big(g(f(x), g(f(y))\big) \leq \beta d'(f(x), f(y)) \leq \beta\alpha d(x,y)$. □

1.6.4 Proposition : Soit E un ensemble, (F,d) un espace métrique, $f : E \longrightarrow F$ une application injective et d_f la distance sur E définie par $d_f(x,y) = d(f(x), f(y))$ (voir 1.1.5). Alors $f : (E, d_f) \longrightarrow (F,d)$ est une isométrie. En particulier, si A est une partie d'un espace métrique E, l'injection canonique $j_A : A \longrightarrow E$ est une isométrie, si l'on munit A de la distance induite par celle de E (voir 1.1.6).

Preuve : Par définition de la distance d_f. □

1.6.5 Proposition : Soit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ un espace produit (voir 1.5.6). Alors les projections canoniques $\pi_i : E \longrightarrow E_i : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ (définies pour $i = 1, 2, \ldots, n$) sont lipschitziennes.

Preuve : Les distances d_p étant métriquement équivalentes (voir 1.5.5), prouvons-le pour d_∞. Les projections $\pi_i : (E, d_\infty) \longrightarrow (E_i, \delta_i)$ sont 1-lipschitziennes, puisque, pour tout $x, y \in E$, on a $\delta_i(x_i, y_i) \leq d_\infty(x,y)$ (en notant δ_i la distance sur E_i). □

1.6.6 Proposition : Soit $f : F \longrightarrow E$ une application où F est un espace métrique et où $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est un espace produit (voir 1.5.6) ; notons $f_1, \ldots, f_n$ les n composantes de f (on écrira donc $f = (f_1, \ldots, f_n)$). On a l'équivalence : f est lipschitzienne ssi chaque f_i l'est.

Preuve : Si f est lipschitzienne, il suffit de remarquer que $f_i = \pi_i \circ f$ pour prouver que f_i l'est aussi (en utilisant 1.6.3 et 1.6.5). Inversement, si chaque f_i est k_i-lipschitzienne, on a $\delta_i(f_i(x), f_i(y)) \leq k_i d(x,y) \leq k d(x,y)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tout $x, y \in F$ (en notant d la distance de F, δ_i la distance sur E_i et $k = \sup_i k_i$) et donc aussi $d_\infty(f(x), f(y)) = \sup_i \delta_i(f_i(x), f_i(y)) \leq k d(x,y)$ pour tout $x, y \in F$ (comme dans 1.6.5, on a fait le choix de d_∞ sur E). □

1.6.7 Proposition : Soit (E,d) un espace métrique; alors l'application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne (si l'on munit $E \times E$ de l'une des distances produit d_p de 1.1.9 et $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle).

Preuve : Les distances d_p étant métriquement équivalentes, prouvons-le pour d_1. Montrons que la distance d est une application 1-lipschitzienne, *i.e.* que l'on a $|d(x,y) - d(x',y')| \leq d_1((x,y),(x',y'))$ pour tout $(x,y),(x',y') \in E \times E$. Mais ceci est immédiat, puisque $d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y') + d(y',y) = d(x',y') + d_1((x,y),(x',y'))$ et $d(x',y') \leq d(x,y) + d_1((x,y),(x',y'))$ (en échangeant (x,y) et (x',y')). □

1.6.8 Proposition : Soit (E,N) un e.v.n. ; alors l'application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne (si l'on munit E de la distance associée à N et $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle).

Preuve : Montrons que la norme est une application 1-lipschitzienne, *i.e.* que l'on a $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y)$ pour tout $x, y \in E$. Mais ceci est immédiat, puisque $N(x) = N(y + (x-y)) \leq N(y) + N(x-y)$ et $N(y) \leq N(x) + N(x-y)$ (en échangeant x et y) ; on peut aussi le déduire de 1.6.7, puisque $N(x) = d(x, 0)$, où d est la distance associée à N. □

1.6.9 Proposition : Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien ; alors le produit scalaire $<,>: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application qui est lipschitzienne séparément en chacune de ses variables (si l'on munit E de la norme associée au produit scalaire $<,>$ et $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle).

Preuve : Prouvons que, pour tout y fixé dans E, l'application $E \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto\ < x, y >$ est $||y||$-lipschitzienne (ce qui suffit, vue la symétrie du produit scalaire). En effet, puisque, pour $x, x' \in E$, on a $|< x, y > - < x', y >| = |< x - x', y >| \leq ||x - x'||\,||y||$. □

1.6.10 Remarque : Par contre, l'application $(x, y) \mapsto < x, y >$ n'est pas lipschitzienne (voir l'application $g(x, y) = xy$ de 1.6.12).

1.6.11 Proposition : Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien, $||\ ||$ la norme associée au produit scalaire et $f : E \longrightarrow E$ une application linéaire. Alors f est une isométrie (*i.e.* f conserve la distance associée à $||\ ||$) $\Longleftrightarrow$ f conserve la norme $||\ ||$ $\Longleftrightarrow$ f conserve le produit scalaire $<,>$.

Preuve : On a facilement l'équivalence : $||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$ pour tout $x, y \in E \Longleftrightarrow ||f(x)|| = ||x||$ pour tout $x \in E$ (l'implication $\Longleftarrow$ va de soi, puisque $f(x) - f(y) = f(x - y)$; pour l'implication $\Longrightarrow$, on pose $y = 0$). Il reste donc à prouver l'équivalence : $||f(x)|| = ||x||$ pour tout $x \in E \Longleftrightarrow < f(x), f(y) >=\ < x, y >$ pour tout $x, y \in E$. On obtient l'implication $\Longleftarrow$ en posant $x = y$; pour l'implication $\Longrightarrow$, on applique l'égalité $2 < a, b >= ||a||^2 + ||b||^2 - ||a - b||^2$, vraie pour tout couple $(a, b) \in E \times E$, aux couples (x, y) et $(f(x), f(y))$. □

1.6.12 Exemples (*en exercices*) : Soit $f : (E, d) \longrightarrow (E', d')$ une application lipschitzienne et A une partie d-bornée de E ; alors $f(A)$ est d'-bornée dans E'.

Si (E, d) est un espace métrique et A une partie non vide de E, alors l'application $d(-, A) : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ (voir 1.1.4) est lipschitzienne (on munit $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\overset{\circ}{I}$ son intérieur (voir 0.2.5) ; considérant la distance usuelle, une fonction continue $I \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, est k-lipschitzienne ssi sa dérivée est bornée par k.

Les applications $f(x) = x^2$, $g(x, y) = xy$ et $h(x) = 1/x$ ne sont pas lipschitziennes pour la distance usuelle.

L'application $f(x, y) = \sin(x - y)$ est lipschitzienne, pour les normes usuelles de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$, contrairement à $g(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$.

Si $f = \text{Arctg}$, alors $f : (\mathbb{R}, (d_u)_f) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ est une isométrie non bijective ; par contre, sa restriction à $(\mathbb{R}, (d_u)_f) \longrightarrow (]-\pi/2, \pi/2[, d_u)$ est une isométrie bijective, tout comme l'application $f : (\mathbb{R}, (d_u)_f) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u) : x \mapsto x^3$.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie n, et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors l'isomorphisme $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$, où les x_i sont les coordonnées de x dans la base donnée (voir 0.3.3), est une isométrie bijective,

si l'on munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme usuelle $\| \|_p$ et E de la norme $\|x\|_p = \|\varphi(x)\|_p$ (voir 1.3.4, 1.3.5 et 1.3.6) ; on dira que φ est un *isomorphisme isométrique*.

Si E est un espace euclidien de dimension n (voir 1.4.1), et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E, on a rappelé dans 1.4.6 que les coordonnées d'un point x de E sur une telle base sont les $x_i =< x, e_i >$ et que l'on a l'égalité $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$; par suite, l'isomorphisme $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$ est encore ici isométrique, en munissant $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne $\| \|_2$, ce qui équivaut, vu 1.6.11, au fait que φ préserve aussi le produit scalaire (voir 1.4.6).

Si F est un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien H, alors la projection orthogonale $p_F : H \longrightarrow H$, sur F, est une application 1-lipschitzienne (voir 1.4.8). De même, les projections $\pi_n : (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \delta) \longrightarrow (\mathbb{R}, d) : x \mapsto x_n$ sont lipschitziennes, où δ est la distance produit (voir 1.1.11) $\delta(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, y_n)/2^n$ et $d = \inf(1, d_u)$; et les projections $\pi_n : (l^p, \| \|_p) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$, pour tout $p \in [1, \infty]$, sont lipschitziennes ; donc, par restriction, elles le restent sur $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \| \|_p)$.

1.6.13 Proposition : Soit E un e.v.n. et λ un réel fixé. Alors les applications $\sigma : E \times E \longrightarrow E : (x,y) \mapsto x+y$ et $m_\lambda : E \longrightarrow E : x \mapsto \lambda x$ sont lipschitziennes (si l'on munit les produits $E \times E$ et $\mathbb{R} \times E$ de l'une des normes produit équivalentes $\| \|_p$ citées dans 1.3.2 et 1.5.7).

Preuve : Prouvons que, pour tout $x, y, x', y' \in E$, on a $\|\sigma(x,y) - \sigma(x',y')\| \leq \|(x,y) - (x',y')\|_1$ et $\|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda| \|x - y\|$; cela résulte immédiatement des égalités $(x+y) - (x'+y') = (x-x') + (y-y')$ et $\lambda x - \lambda y = \lambda(x-y)$. Ainsi, σ et m_λ sont respectivement 1 et $|\lambda|$-lipschitziennes. □

1.6.14 Remarque : Par contre, l'application $m : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ n'est pas lipschitzienne (voir l'application $g(x,y) = xy$ de 1.6.12).

1.6.15 Proposition : Soit E un espace métrique, F un espace normé, λ un réel et $f, g : E \longrightarrow F$ deux applications lipschitziennes. Alors les applications $f+g$ et λf sont lipschitziennes

Preuve : Il suffit de remarquer que $f + g = \sigma \circ h$ où $h : E \longrightarrow F \times F : x \mapsto (f(x), g(x))$ et $\lambda f = m_\lambda \circ f$ et d'utiliser les propositions 1.6.3, 1.6.6 et 1.6.13. □

On termine ce chapitre par une traduction très utile des comparaisons métriques de distances (voir 1.5.1) en termes d'applications lipschitziennes :

1.6.16 Proposition : Soit d et d' deux distances sur un ensemble E. On a les équivalences suivantes :

- d et d' sont métriquement comparables ssi l'une des deux applications identités $id : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ ou $id : (E,d') \longrightarrow (E,d)$ est lipschitzienne.
- $d \overset{Met}{\sim} d'$ ssi les deux applications identités $id : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ et $id : (E,d') \longrightarrow (E,d)$ sont lipschitziennes.

Preuve : Il suffit de traduire sur les identités les définitions 1.5.1. □

1.6.17 Exemples (*en exercices*) : Utiliser 1.6.16 pour montrer que l'implication "f est lipschitzienne $\Longrightarrow f^{-1}$ est lipschitzienne" est fausse. Cependant, les trois implications suivantes sont vraies : f est une isométrie $\Longrightarrow f^{-1}$ est une isométrie ; f est linéaire $\Longrightarrow f^{-1}$ est linéaire (ici E et E' sont des espaces vectoriels et les distances sont inutiles) ; f est croissante $\Longrightarrow f^{-1}$ est croissante (ici $E = E' = \mathbb{R}$).

Chapitre II
DU METRIQUE AU TOPOLOGIQUE

1. SUITES CONVERGENTES

2.1.1 Définitions : Soit (E, d) un espace métrique, $x \in E$, et (x_n) une suite de points de E (voir 0.1.3). On dit que la suite (x_n) *converge vers* x *dans l'espace* (E, d) (ou *d-converge dans* E) *quand* $n \longrightarrow +\infty$, ce que l'on écrit $x_n \xrightarrow{d}_{n \to +\infty} x$, si elle vérifie l'énoncé suivant :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad d(x_n, x) < \varepsilon.$$

La suite (x_n) converge donc vers x dans (E, d) ssi la suite de nombres réels $(d(x_n, x))$ converge vers 0 au sens habituel (voir 0.1.3). En fait, sachant que, lorsqu'un tel x existe, il est unique (voir 2.1.4), on dira alors aussi que x est ***la limite de la suite*** (x_n) ***(au sens de*** d***)*** ou est ***la d-limite de la suite*** (x_n), et l'on écrira $x = \lim_{n \to +\infty} x_n$ (au sens de d) pour $x_n \xrightarrow{d}_{n \to +\infty} x$; on peut omettre partout d et $n \to +\infty$ quand il n'y a pas d'ambiguité et écrire simplement $x_n \longrightarrow x$ et $x = \lim x_n$.

2.1.2 Remarques : Bien sûr, on retrouve la notion de convergence habituelle dans $\mathbb{R}$ (voir 0.1.3), muni de la distance d_u (dans $\mathbb{R}$, on écrira $a_n \longrightarrow a$ pour $a_n \xrightarrow{d_u} a$).

En traduisant à l'aide de 1.2.1, on obtient l'équivalence : $x_n \xrightarrow{d} x$ ssi $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad x_n \in B_d(x, \varepsilon)$ (*i.e.*, pour tout $\varepsilon > 0$, les x_n sont tous, sauf un nombre fini, dans la boule $B_d(x, \varepsilon)$).

2.1.3 Exemples (*en exercices*) : Une suite stationnaire (voir 0.1.3) converge pour toutes les distances.

Toute suite d'entiers d_u-convergente est stationnaire.

Les suites d_0-convergentes (voir 1.1.4) sont les suites stationnaires.

Si (x_n) est une suite convergente dans un espace métrique telle que l'ensemble $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit fini, alors cette suite est stationnaire dans S.

2.1.4 Proposition : Dans un espace métrique, il y a unicité pour la limite d'une suite convergente. De plus, toute sous-suite (voir 0.2.1) d'une suite convergente converge vers la même limite.

Preuve : Soit (E, d) un espace métrique et (x_n) une suite de points de E qui converge vers x. On a donc $d(x, x_n) \longrightarrow 0$.

Supposons que la suite (x_n) converge aussi vers x', *i.e.* que l'on a aussi $d(x', x_n) \longrightarrow 0$. Il reste donc à utiliser l'inégalité triangulaire $d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n, x')$ (vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$) pour en déduire que $d(x, x') = 0$, *i.e.* que $x = x'$.

Soit aussi (x_{k_n}) une sous-suite de la suite (x_n) (la suite d'entiers (k_n) est donc une suite strictement croissante : voir 0.2.1) ; montrons que (x_{k_n}) converge aussi

vers x. Soit $\varepsilon > 0$; il existe donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $d(x, x_n) < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ (puisque $x = \lim x_n$). *A fortiori* on a $d(x, x_{k_n}) < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ (puisque $k_n \geq k_N \geq N$; voir 0.2.1 pour la dernière inégalité). □

2.1.5 Proposition : Dans un espace métrique, toute suite convergente est bornée.

Preuve : Soit (E, d) un espace métrique et (x_n) une suite de points de E qui converge vers $x \in E$. Montrons que l'ensemble $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est d-borné. Trouvons pour cela un réel $\alpha > 0$ tel que l'on ait $d(x, x_n) \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $d(x, x_n) \leq 1$ pour tout $n \geq N$. Si l'on pose $\alpha = \sup\big(1, d(x, x_1), \ldots, d(x, x_{N-1})\big)$, on a $1 \leq \alpha < +\infty$ et $d(x, x_n) \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que l'on a $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq 2\alpha$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, si bien que S est d-borné (voir 1.1.2) ; on a en fait prouvé que $S \subset B_d(x, \alpha)$ (voir 1.2.2). □

2.1.6 Remarque : La réciproque de 2.1.5 est évidemment fausse (considérer la suite $((-1)^n)$ dans $(\mathbb{R}, d_u)$). Cependant, dans le cas où $E = \mathbb{R}$, muni de sa distance usuelle, on a les résultats suivants :

2.1.7 Proposition : Toute suite monotone de réels est convergente dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$ selon qu'elle est bornée ou non dans $\mathbb{R}$: sa limite est sa borne supérieure si elle croît, sa borne inférieure si elle décroît (voir 0.2.4).

Preuve : Soit (a_n) une suite croissante de réels, et soit $a = \sup_n a_n$; montrons que la suite (a_n) converge vers a. Supposons d'abord que (a_n) est majorée dans $\mathbb{R}$ (alors $a \in \mathbb{R}$) et soit $\varepsilon > 0$; on sait (par 0.2.4) qu'il existe un entier N tel que l'on ait $a - \varepsilon < a_N$. La suite étant croissante, on a, *a fortiori*, $a - \varepsilon < a_n$ (*i.e.* $0 \leq a - a_n < \varepsilon$) pour tout $n \geq N$. Ainsi, $\lim a_n = a$. Si maintenant (a_n) n'est pas majorée, *i.e.* si $a = +\infty$, alors, pour tout réel α, il existe un entier N tel que $\alpha < a_N$, et donc, *a fortiori*, tel que $\alpha < a_n$ pour tout $n \geq N$; on a donc obtenu, dans ce cas, que $\lim a_n = +\infty = a$. □

2.1.8 Théorème (de Bolzano-Weierstrass) : Toute suite de réels bornée possède une sous-suite convergente.

Preuve : Soit (a_n) une suite de réels bornée ; il existe donc un réel $\alpha > 0$ vérifiant $|a_n| \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons alors $x_n = \sup_{p \geq n} a_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (cette borne supérieure existe bien dans $\mathbb{R}$, et l'on a $-\alpha \leq x_n \leq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) ; la suite (x_n) étant décroissante et bornée (le fait qu'elle soit décroissante résulte de l'inclusion $\{p \in \mathbb{N} \mid p \geq m\} \subset \{p \in \mathbb{N} \mid p \geq n\}$, vraie si $n \leq m$ ... voir 0.2.4), elle converge vers une limite l (par construction, on a $-\alpha \leq l \leq \alpha$, et, d'après 2.1.7, $l = \inf x_n$).

Construisons alors une sous-suite (a_{n_k}) de la suite (a_n) qui converge vers l. Il s'agit donc d'abord de construire une suite (n_k) d'entiers qui soit strictement croissante ; procédons par récurrence sur l'entier k : posons $n_0 = 0$, et supposons définis $0 < n_1 < \ldots < n_{k-1}$. Comme la suite $(x_n)_{n > n_{k-1}}$ converge vers l (d'après 2.1.4), il existe un entier $p_k > n_{k-1}$ tel que $x_{p_k} - l < 1/2k$. Comme $x_{p_k} = \sup_{n \geq p_k} a_n$, on sait, d'après 0.2.4, qu'il existe un entier $n_k \geq p_k$ tel que $x_{p_k} - 1/2k < a_{n_k}$. On a ainsi construit un entier n_k vérifiant $n_k > n_{k-1}$; on dispose donc d'une suite strictement croissante d'entiers, si bien que la suite (a_{n_k}) est une sous-suite de la suite (a_n). La preuve que cette sous-suite (a_{n_k}) converge vers l est alors

immédiate puisque, pour tout $k > 0$, on a $|l - a_{n_k}| \leq |l - x_{p_k}| + |x_{p_k} - a_{n_k}| < 1/k$, et donc $|l - a_{n_k}| \longrightarrow 0$. □

2.1.9 Remarques : Le réel $l = \lim_n \sup_{p \geq n} a_p$, défini dans 2.1.8, s'appelle la *limite supérieure* de la suite (a_n) (il se note $\overline{\lim}_n a_n$). Symétriquement, toute suite de réels bornée possède une *limite inférieure* définie par $\underline{\lim}_n a_n = \lim_n \inf_{p \geq n} a_p = \sup_n \inf_{p \geq n} a_p$. On verra dans 5.2.13 que ces limites sont respectivement la plus grande et la plus petite des valeurs d'adhérence de la suite (a_n).

On reverra le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les e.v.n. de dimension finie dans 5.1.27.

2.1.10 Proposition : $f : (E, d) \longrightarrow (E', d')$ une application lipschitzienne et (x_n) une suite dans E qui d-converge vers $x \in E$; alors la suite $(f(x_n))$ d'-converge vers $f(x)$ dans E'.

Preuve : Cela résulte immédiatement du fait qu'il existe un réel $k > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $d'(f(x_n), f(x)) \leq k d(x_n, x)$. □

2.1.11 Corollaire : Soit E un ensemble, (F, d) un espace métrique et $f : E \longrightarrow F$ une application injective. Munissons E de la distance d_f définie par $d_f(x, y) = d(f(x), f(y))$ pour tout $x, y \in E$ (voir 1.1.5). Soit aussi (x_n) une suite de points de E et $x \in E$. Alors (x_n) d_f-converge vers x dans E ssi $(f(x_n))$ d-converge vers $f(x)$ dans F. En particulier, si E est une partie A de F, alors (x_n) d_A-converge vers x dans A ssi (x_n) d-converge vers x dans F (pour d_A, voir 1.1.6).

Preuve : C'est immédiat car $f : (E, d_f) \longrightarrow (F, d)$ et $j_A : (A, d_A) \longrightarrow (F, d)$ sont des isométries (voir 1.6.4). □

2.1.12 Corollaire : Si d et d' sont deux distances métriquement comparables sur un ensemble E, par exemple s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $d \leq \alpha d'$, alors toute suite de E qui converge pour d' converge *a fortiori* pour d vers la même limite. En particulier, deux distances métriquement équivalentes sur un même ensemble possèdent les mêmes suites convergentes (plus présisément, si d et d' sont deux distances sur E, si (x_n) est une suite de points de E et si $x \in E$, on a l'équivalence : $x_n \xrightarrow{d} x \Longleftrightarrow x_n \xrightarrow{d'} x$).

Preuve : Car $id : (E, d') \longrightarrow (E, d)$ est α-lipschitzienne (voir 1.6.16). □

2.1.13 Proposition : Soit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ un espace produit (voir 1.5.6), (x_k) une suite de points de E et $x \in E$. Alors (x_k) converge vers x dans E ssi (x_{ki}) converge vers x_i dans E_i pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, où x_{ki} est la $i^{ème}$ composante de l'élément x_k de E.

Preuve : $\Longrightarrow$: on utilise le fait que les projections canoniques $\pi_i : E \longrightarrow E_i$ sont lipschitziennes pour les distances produit (voir 1.6.5 et 2.1.10).

$\Longleftarrow$: Les distances produit étant métriquement équivalentes sur E (voir 1.5.5), il suffit, d'après 2.1.12, de le prouver pour d_∞. Soit $\varepsilon > 0$; il s'agit de trouver un entier N tel que, pour tout $k \geq N$, on ait $d_\infty(x_k, x) < \varepsilon$. Mais si l'on suppose que $x_{ki} \xrightarrow{\delta_i} x_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ (en notant δ_i la distance sur E_i), il existe, pour chacun de ces i, un entier N_i tel que l'on ait $\delta_i(x_{ki}, x_i) < \varepsilon$ dès que $k \geq N_i$. Posant alors $N = \sup_i N_i$, on dispose d'un entier (car les N_i sont en nombre fini) tel que, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, on ait $\delta_i(x_{ki}, x_i) < \varepsilon$ dès que $k \geq N$ (car $k \geq N$ implique

$k \geq N_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$) ; on a donc bien $d_\infty(x_k, x) = \sup_i \delta_i(x_{ki}, x_i) < \varepsilon$ pour tout $k \geq N$, la dernière inégalité étant stricte car il s'agit d'un sup fini. □

2.1.14 Exemples (*en exercices*) : Sur $\mathbb{R}^n$ les distances usuelles d_p associées aux normes usuelles $\| \|_p$ (pour $p = 1, 2, \infty$) (qui sont équivalentes ... voir 1.5.7) donnent toutes la même notion de convergence (dite *usuelle*) : $x_k \longrightarrow x \iff x_{ki} \longrightarrow x_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$. On parle aussi de convergence usuelle dans $\mathbb{C}$, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$ (c'est en fait celle de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^{m\times n}$ et $\mathbb{R}^{n+1}$, voir 1.3.6) ; donner des exemples concrets.

Dans $\mathbb{R}[X]$, étudier la convergence des suites de polynômes (P_n) et (Q_n) définies par $P_n(X) = 1/n + X/n + \cdots + X^n/n$ et $Q_n(X) = \sqrt{n}P_n(X)$, pour les normes $\| \|_p$ données dans 1.3.7.

Dans $C([0,1], \mathbb{R})$ (voir 1.3.8), on obtient la *convergence en moyenne* (pour $\| \|_1$), la *convergence en moyenne quadratique* (pour $\| \|_2$) et *la convergence uniforme* (pour $\| \|_\infty$) ... voir 1.3.10 ; et, d'après 2.1.12 et 1.5.7, la convergence uniforme implique la convergence en moyenne quadratique, qui implique la convergence en moyenne (les implications non mentionnées sont fausses).

2.1.15 Remarques (*en exercices*) : Pour les espaces de suites réelles $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ou les l^p (munis de leurs normes $\| \|_p$, pour $p \in [1, +\infty]$; voir 1.3.7), on a l'implication : $x_n \longrightarrow x \Longrightarrow x_{ni} \longrightarrow x_i$ dans $(\mathbb{R}, d_u)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ (puisque, d'après 1.6.12, les projections sont lipschitziennes) ; par contre, la réciproque est fausse : il ne suffit pas qu'une suite dans ces espaces converge composante par composante pour qu'elle converge (contrairement à 2.1.13). Cependant, on a l'équivalence : $x_n \to x$ dans $(l^2, \| \|_2)$ ssi, dans $(\mathbb{R}, d_u)$, on a $\|x_n\|_2 \to \|x\|_2$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $x_{ni} \to x_i$.

Par contre, si l'on considère sur $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ la distance produit δ définie dans 1.1.11 et 1.5.8 (avec ici $d = \inf(1, d_u)$), on a l'équivalence : $x_n \longrightarrow a$ dans $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, \delta)$ ssi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{nk} \longrightarrow a_k$ dans $(\mathbb{R}, d)$ (*i.e.* ssi il y a convergence composante par composante).

En fait, la convergence, composante par composante, correspond à la convergence simple (voir 2.1.16) dans la mesure où une suite (a_k) de réels est une application $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ (définie par $s(k) = a_k$; voir 0.1.3).

2.1.16 Définition : Soit E un ensemble et (F, d) un espace métrique; on définit la notion de *convergence simple* dans l'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de E dans F : la suite (f_n) converge simplement vers f si, pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$ dans (F, d).

2.1.17 Proposition : Soit E un ensemble et (F, d) un espace métrique ; posons $d_\infty(f, g) = \sup_{x\in E} d(f(x), g(x))$, pour tout $f, g \in \mathcal{F}(E, F)$. Alors d_∞ est une *quasi-distance* sur $\mathcal{F}(E, F)$ (*i.e.* une distance à valeurs éventuellement infinies) ; on l'appelle la *quasi-distance de la convergence uniforme*. On a l'implication : (f_n) converge uniformément vers f (*i.e.* pour d_∞) $\Longrightarrow$ (f_n) converge simplement vers f.

Preuve : Prouvons que d_∞ est une quasi-distance sur $\mathcal{F}(E, F)$: l'axiome (D_1) résulte des inégalités $0 \leq d(f(x), g(x)) \leq d_\infty(f, g)$, vraies pour tout $x \in E$. La symétrie de d_∞ résulte immédiatement de celle de d. Quant à l'axiome (D_3) : soit $h \in \mathcal{F}(E, F)$; prouver que l'on a $d_\infty(f, g) \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g)$ revient à prouver que l'on a $d(f(x), g(x)) \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g)$ pour tout $x \in E$ (voir 0.2.4), ce qui est immédiat puisque l'on a $d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), h(x)) + d(h(x), g(x)) \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g)$ pour tout $x \in E$.

Soit maintenant (f_n) une suite dans $\mathcal{F}(E,F)$ qui converge uniformément vers $f \in \mathcal{F}(E,F)$, *i.e.* telle que $d_\infty(f_n, f) \longrightarrow 0$. Comme on a $0 \leq d(f_n(x), f(x)) \leq d_\infty(f_n, f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$, on en déduit que l'on a aussi $d(f_n(x), f(x)) \longrightarrow 0$ $\big($*i.e.* que $f_n(x) \xrightarrow{d} f(x)$ dans $F\big)$ pour tout $x \in E$: la suite (f_n) converge donc simplement vers f. □

2.1.18 Remarques (*en exercices*) : La convergence simple n'implique en général pas la convergence uniforme ; on verra dans 5.2.26 (théorème de Dini) une condition suffisante pour que cela soit vrai.

Si l'on travaille avec les quasi-distances comme avec les distances, c'est qu'à toute quasi-distance d, on peut associer une distance δ qui possède les mêmes suites convergentes : par exemple $\delta = \inf(1, d)$ ou $\delta = d/(1+d)$ (voir 1.1.4 et 2.2.9) et ne change donc pas la topologie (voir la section III.4). Par contre, on ne peut pas faire de remarque analogue avec des "quasi-normes" (voir 1.3.18).

2.1.19 Proposition : Soit E un ensemble non vide et (F,d) un espace métrique. On considère l'ensemble $\mathcal{F}_b(E,F)$ des applications d-bornées de E dans F (voir 1.1.2). Alors la quasi-distance d_∞ sur $\mathcal{F}(E,F)$ induit une distance sur $\mathcal{F}_b(E,F)$, que l'on appelle la ***distance de la convergence uniforme***. De plus, la limite uniforme d'une suite d_∞-convergente dans $\mathcal{F}_b(E,F)$ est une application bornée.

Preuve : Pour prouver que d_∞ est une distance sur $\mathcal{F}_b(E,F)$, il suffit de vérifier l'on a $d_\infty(f,g) < +\infty$ pour tout $f, g \in \mathcal{F}_b(E,F)$. Soit donc $f, g \in \mathcal{F}_b(E,F)$ $\big($on a donc $\delta(f(E)) < +\infty$ et $\delta(g(E)) < +\infty$, d'après 1.1.3$\big)$ et fixons un $a \in E$; alors, pour tout $x \in E$, on a $d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(a)) + d(f(a), g(a)) + d(g(a), g(x)) \leq \delta(f(E)) + d(f(a), g(a)) + \delta(g(E))$, et donc aussi (voir 0.2.4) $d_\infty(f,g) \leq \delta(f(E)) + d(f(a), g(a)) + \delta(g(E)) < +\infty$.

Soit maintenant (f_n) une suite d'applications bornées qui converge uniformément vers une application f ; montrons que f est bornée. Par hypothèse, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $d_\infty(f_n, f) < 1$ pour tout $n \geq N$. Fixons donc un $n_0 \geq N$; comme on a $d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + d(f_{n_0}(y), f(y)) \leq 2d_\infty(f, f_{n_0}) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) < 2 + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) \leq 2 + \sup_{x,y\in E} d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) = 2 + \delta(f_{n_0}(E))$, on en déduit que $\delta(f(E)) = \sup_{x,y\in E} d(f(x), f(y)) \leq 2 + \delta(f_{n_0}(E)) < +\infty$, et donc que f est bornée. □

2.1.20 Remarques : Lorsque d est bornée, alors $\mathcal{F}_b(E,F) = \mathcal{F}(E,F)$; dans le cas contraire, il peut être intéressant (pour ne pas parler de quasi-distance) de remplacer d par une distance δ bornée qui ne change pas la topologie de F (voir δ_1 et δ_2 dans 2.2.9 et 2.1.18 ; et la section III.4). Par contre, si d dérive d'une norme (F est donc un espace vectoriel), δ ne dérivant pas d'une norme (puisqu'elle est bornée), on perd (en remplaçant d par δ) le fait que la distance de la convergence uniforme sur les fonctions d-bornées dérive d'une norme (voir ci-dessous).

Lorsque F est un e.v.n., alors la distance de la convergence uniforme d_∞ sur $\mathcal{F}_b(E,F)$ dérive de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in E} \|f(x)\|$, dite ***norme de la convergence uniforme***, que l'on a déjà rencontrée dans 1.3.9, 1.3.10 et 2.1.14.

On interprétera topologiquement le résultat final de 2.1.19 en disant que $\mathcal{F}_b(E,F)$ est un fermé de $\mathcal{F}(E,F)$ pour la quasi-distance d_∞ de la convergence uniforme ; voir 3.1.25.

2.1.21 Exemples (*en exercices*) : Dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, donner une suite de fonctions qui converge pour les normes $\| \|_1$ et $\| \|_2$, mais qui ne converge pas simplement. Pour tout $x \in [0,1]$, l'application $eval_x : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f(x)$ n'est pas continue pour les normes $\| \|_1$ et $\| \|_2$, mais elle l'est pour la norme $\| \|_\infty$.

2. COMPARAISON TOPOLOGIQUE DES DISTANCES (I)

Fixons ici un ensemble E et deux distances d et d' sur E.

2.2.1 Définition : On dit que d' est *plus fine que* d (ou que d est *moins fine que* d') si toute suite de points de E d'-convergente est d-convergente (vers la même limite).

2.2.2 Proposition : S'il existe un réel $\alpha > 0$ vérifiant que $d \leq \alpha d'$, alors d' est plus fine que d.

Preuve : Il suffit d'utiliser 2.1.12. □

2.2.3 Remarque : La réciproque de 2.2.2 est fausse : Sur $\mathbb{R}$, la distance discrète d_0 est la plus fine de toutes les distances (voir 2.1.3), et l'on a vu dans 1.5.4 qu'elle n'est pas métriquement comparable à la distance usuelle d_u.

2.2.4 Définitions : On dit que d et d' sont *topologiquement comparables* si d est plus ou moins fine que d'.

On dit que d et d' sont *topologiquement équivalentes*, ce que l'on écrit $d \overset{Top}{\sim} d'$ si d est plus et moins fine que d' (*i.e.* si d et d' possèdent les mêmes suites convergentes).

La relation $d \overset{Top}{\sim} d'$ est évidemment une relation d'équivalence.

2.2.5 Remarque : L'emploi du mot "topologique" trouvera toute sa justification dans la section III.4 (voir 3.4.3) ; voir aussi 2.3.18.

2.2.6 Proposition : Soit d et d' deux distances sur un même ensemble. On a l'implication $d \overset{Met}{\sim} d' \Longrightarrow d \overset{Top}{\sim} d'$ (voir 1.5.1).

Preuve : Résulte immédiatement de 2.2.2. □

2.2.7 Proposition : Deux distances topologiquement équivalentes possèdent les mêmes suites convergentes, mais pas forcément les mêmes parties bornées.

Preuve : Pour les suites convergentes, c'est vrai par définition même de l'équivalence topologique. Pour les parties bornées, il suffit de considérer la distance usuelle d_u sur $\mathbb{R}$ et la distance $\delta_1 = \inf(1, d_u)$; elles sont topologiquement équivalentes, d'après 2.2.9, et pourtant, elles n'ont pas les mêmes parties bornées : en effet, toute partie de $\mathbb{R}$ est δ_1-bornée (car $\delta_1 \leq 1$), ce qui est loin d'être le cas pour d_u. □

2.2.8 Remarque : Par contre, on a vu dans 1.5.2 que deux distances métriquement équivalentes ont les mêmes parties bornées.

2.2.9 Exemples (*en exercices*) : Sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$, les distances d_u et d_0 sont topologiquement équivalentes, d'après 1.5.4 et 2.1.3.

Sur $\mathbb{N}$, $d'(n,m) = |1/(n+1) - 1/(m+1)|$ est une distance qui est topologiquement équivalente à d_u (et donc à d_0, d'après ce qui précède).

Sur $\mathbb{R}$, la distance $d(x,y) = |\text{Arctg}\, x - \text{Arctg}\, y|$ (voir 1.1.8 et 1.5.4) est topologiquement équivalente à d_u.

Si (E,d) est un espace métrique, et si $\delta_1 = \inf(1,d)$ et $\delta_2 = d/(1+d)$, on a $\delta_1 \overset{Top}{\sim} d \overset{Top}{\sim} \delta_2$ (on a vu dans 1.5.4 que, si d n'est pas bornée, les δ_i ne sont pas métriquement équivalentes à d).

Sur les $\mathbb{R}^n$ (et donc sur $\mathbb{C}$, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$) les distances usuelles d_p associées aux normes usuelles $\| \ \|_p$ (pour $p = 1, 2, \infty$) sont topologiquement équivalentes (puisque équivalentes, d'après 1.5.7) : on a déjà vu dans 2.1.14 qu'elles donnent toutes la même notion de convergence (dite *usuelle*).

Dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, Les distances associées aux normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ ne sont pas topologiquement équivalentes, bien que topologiquement comparables (voir 1.5.7 et 2.1.14).

2.2.10 Remarques : Sur $\mathbb{R}[X]$ (et donc sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, vue l'isométrie bijective $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ définie dans 0.3.3), les normes $\| \ \|_p$ ne sont pas topologiquement équivalentes (bien que topologiquement comparables, d'après 1.5.8), *i.e.* ne possèdent pas les mêmes suites convergentes : voir les exemples donnés dans 2.1.14.

La réciproque de 2.2.6 est fausse : considérer d et $\delta_1 = \inf(1,d)$, où d est une distance non bornée (voir 1.5.4 et 2.2.9). Cependant, dans le cas “normable”, on a le résultat important suivant (qui sera prouvé dans 2.4.5) : soit N et N' deux normes sur un même $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; on a alors l'équivalence $N \sim N' \iff N \overset{Top}{\sim} N'$.

3. APPLICATIONS CONTINUES (I)

Comme précédemment la section 1.6, quand on parlera d'une application $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$, cela signifiera que (E,d) et (E',d') sont des espaces métriques et que $f : E \longrightarrow E'$ est une application.

2.3.1 Définition : Soit $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ une application et x un point de E. On dit f est *continue au point* x si, pour toute suite (x_n) de points de E, on a l'implication : $x_n \overset{d}{\longrightarrow} x \Longrightarrow f(x_n) \overset{d'}{\longrightarrow} f(x)$; et elle le reste si l'on remplace les distances d et d' par deux distances qui leur sont respectivement topologiquement équivalentes (en vertu de 2.2.7).

2.3.2 Proposition : Soit $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ et $g : (E',d') \longrightarrow (E'',d'')$ deux applications et x un point de E. Si f est continue au point x et g est continue au point $f(x)$, alors $g \circ f : (E,d) \longrightarrow (E'',d'')$ est continue au point x.

Preuve : Considérons (x_n) une suite de points de E qui d-converge vers x ; la continuité de $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ au point x implique que la suite $(f(x_n))$ d'-converge vers $f(x)$, et la continuité de $g : (E',d') \longrightarrow (E'',d'')$ au point $f(x)$ implique que la suite $(g(f(x_n)))$ d''-converge vers $g(f(x))$. □

2.3.3 Proposition : Soit $f : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ une application, et x un point de E. Alors f est continue au point x ssi elle vérifie la propriété $(\mathcal{C}_x)$:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall y \in E \quad \big(d(x,y) < \eta \Longrightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon\big),$$

le η en question dépendant de ε, et surtout de x. Dans l'implication précédente, on peut remplacer les $<$ par des $\leq$.

Preuve : Supposons $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ continue au point x. Si f ne vérifiait pas la propriété $(\mathcal{C}_x)$, elle vérifierait l'énoncé : $\exists\varepsilon > 0 \quad \forall\eta > 0 \quad \exists y \in E$ $\big(d(x,y) < \eta$ et $d'(f(x), f(y)) \geq \varepsilon\big)$; il existerait donc un $\varepsilon > 0$ et une suite (y_n) dans E (en se limitant à des η de la forme $1/n$) vérifiant $d(x,y_n) < 1/n$ et $d'(f(x), f(y_n)) \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On disposerait donc d'une suite (y_n) qui d-converge vers x $\big($car $d(x,y_n) \longrightarrow 0\big)$, et pourtant telle que la suite $(f(y_n))$ ne d'-converge pas vers $f(x)$ $\big($car $d'(f(x), f(y_n)) \not\longrightarrow 0\big)$, ce qui contredit le fait que f est continue au point x.

Inversement, supposons que f vérifie la propriété $(\mathcal{C}_x)$, et soit (x_n) une suite de points de E qui d-converge vers $x \in E$; prouvons que la suite $(f(x_n))$ d'-converge vers $f(x)$. Soit donc $\varepsilon > 0$; par la propriété $(\mathcal{C}_x)$, on sait qu'il existe un $\eta > 0$ tel que l'on ait $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tout y vérifiant $d(x,y) < \eta$. La suite (x_n) d-convergeant vers x, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $d(x,x_n) < \eta$ et donc aussi $d'(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$, d'après ce qui précède. Ceci prouve que la suite $(f(x_n))$ d'-converge vers $f(x)$. □

2.3.4 Remarque : Comme la condition $y = x$ implique $d'(f(x), f(y)) = 0$, on peut se limiter aux $y \neq x$ dans la propriété $(\mathcal{C}_x)$ de la proposition 2.3.3. Cette propriété $(\mathcal{C}_x)$ peut se traduire en disant que $f(y)$ *tend vers* $f(x)$ *quand* y *tend vers* x, ce que l'on notera $f(y) \underset{y\to x}{\longrightarrow} f(x)$ ou encore $f(x) = \lim_{y\to x} f(y)$.

2.3.5 Exemples : Bien sûr, si $E = E' = \mathbb{R}$ et $d = d' = d_u$, on retrouve la notion habituelle de continuité en un point étudiée en DEUG (voir 0.4.1) ; il en est de même dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, $E' = \mathbb{R}$ ou même $\mathbb{R}^m$, que l'on munit de l'une quelconque des distances usuelles d_p.

2.3.6 Définitions : On dit qu'une application $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ est *continue* si elle est continue en tout point de E ; et elle le reste si l'on remplace les distances d et d' par deux distances δ et δ' qui leur sont respectivement topologiquement équivalentes.

On dit que $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ est un *homéomorphisme* si f est bijective et si $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ et $f^{-1} : (E',d') \longrightarrow (E,d)$ sont continues ; on dira que deux espaces métriques (E,d) et (E',d') sont *homéomorphes*, ce que l'on écrira $(E,d) \simeq (E',d')$ (ou plus simplement $E \simeq E'$, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les distances), s'il existe un homéomorphisme $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$.

La relation $E \simeq E'$ est évidemment une relation d'équivalence.

2.3.7 Proposition : Soit $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ une application. Alors f est continue ssi, pour toute suite (x_n) de points de E et tout $x \in E$, on a l'implication : $x_n \overset{d}{\longrightarrow} x \Longrightarrow f(x_n) \overset{d'}{\longrightarrow} f(x)$. Il en résulte que le composé de deux applications continues est continu.

Preuve : évident avec 2.3.1, 2.3.2 et 2.3.6. □

2.3.8 Exemples (*en exercices*) : Donner un exemple d'application continue $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ et d'une partie A de E qui soit d-bornée bien que son image $f(A)$ ne soit pas d'-bornée (voir 1.6.12) ; on rappelle que les applications lipschitziennes, elles, respectent les parties bornées (voir 1.6.12).

Etudier la continuité des fonctions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (définies par $f(x) = \operatorname{Arctg} x$ et $g(x) = 0$ ou 1, selon que $x \leq 0$ ou non), relativement au choix des distances sur $\mathbb{R}$, aussi bien à la source qu'au but (par exemple, les distances d_u, d_0, $d(x,y) = |\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y|$, $\delta_1(x,y) = \inf(1, |x-y|)$ ...etc).

L'inverse d'une bijection continue n'est pas forcément continue. Par contre, c'est vrai pour toute bijection continue $(\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$: voir 4.2.13 ; se reporter aussi à 1.6.17, 5.1.13, 7.1.8, 9.2.12 et 9.3.7.

2.3.9 Proposition : Soit (F,d) un espace métrique et $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ un espace produit (voir 1.5.6). Soit aussi $f : F \longrightarrow E$ une application ; on notera, comme dans 1.6.6, f_i les composantes de f. On a l'équivalence : $f : F \longrightarrow E$ est continue ssi $f_i : F \longrightarrow E_i$ est continue pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$.

Preuve : Considérons une suite (x_k) dans F et $x \in F$ tels que $x_k \xrightarrow{d} x$; il s'agit de prouver que $f(x_k) \xrightarrow{d_p} f(x)$ dans E ssi $f_i(x_k) \xrightarrow{\delta_i} f_i(x)$ dans E_i pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ (en notant δ_i la distance de E_i) ; mais c'est exactement ce qui a été prouvé dans 2.1.13. □

2.3.10 Remarque : Comme dans 1.6.6, on peut remarquer le fait que $f_i = \pi_i \circ f$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ (où $\pi_i : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow E_i : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$), et donc retrouver la continuité des f_i comme résultant de celle de f et des π_i (voir 1.6.5 et 2.3.14).

2.3.11 Exemples (*en exercices*) : Les applications $f(x) = (2x, 1/(1+x^2))$ et $g(x,y) = (xy, x+y)$ sont continues pour les distances usuelles sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.

2.3.12 Proposition : Soit E, F, G trois espaces métriques et $f : E \times F \longrightarrow G$ une application. Pour chaque $x_0 \in E$, on définit l'*application partielle* $f(x_0, -) : F \longrightarrow G : y \mapsto f(x_0, y)$; de la même façon, pour chaque $y_0 \in F$, on définit l'*application partielle* $f(-, y_0) : E \longrightarrow G : x \mapsto f(x, y_0)$. Alors, si f est continue (pour l'une des distances produit d_p de 1.1.9 sur $E \times F$), les deux applications partielles définies ci-dessus sont continues.

Preuve : On utilise le fait que $f(x_0, -) = f \circ i_{x_0}$, où $i_{x_0} : F \longrightarrow E \times F : y \mapsto (x_0, y)$ est une application continue puisque ses composantes le sont. □

2.3.13 Remarque (*en exercice*) : La réciproque de 2.3.12 est fausse (considérer l'application $f(x,y) = 0$ ou $2xy/(x^2+y^2)$, selon que $(x,y) = (0,0)$ ou non). Pareil, en remplaçant partout "continue" par "lipschitzienne" (voir 1.6.9 et 1.6.10).

2.3.14 Proposition : Toute application lipschitzienne est continue. Par suite (voir 1.6.17), toute isométrie bijective est un homéomorphisme (dans ce cas, on dira que c'est un ***homéomorphisme isométrique***).

Preuve : Voir 2.1.10. □

2.3.15 Exemples (*en exercices*) : Pour toute injection $f : E \longrightarrow F$, où E est un ensemble et F un espace métrique (de distance d), alors $f : (E, d_f) \longrightarrow (f(E), d)$ est un homéomorphisme (c'est même une isométrie bijective, de sorte que (E, d_f) et (F, d) sont isométriquement homéomorphes ; voir 2.3.14). Par exemple, on a $(\mathbb{R}, d) \simeq (]-\pi/2, \pi/2[, d_u)$ et $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d}) \simeq ([-\pi/2, \pi/2], d_u)$, où d et $\overline{d}$ sont d_f, avec

$f = \text{Arctg}$, définie respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$ (voir 1.2.3). De même, on considère sur $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ (muni de l'ordre usuel de $\mathbb{N}$ auquel on rajoute $n < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), la distance bornée définie par $d'(n,m) = |1/(n+1) - 1/(m+1)|$ et $d'(n,+\infty) = 1/(n+1)$ (où $n, m \in \mathbb{N}$). Alors $(\mathbb{N}', d') \simeq (S', d_u)$, où $S' = S \cup \{0\}$, avec $S = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$; par restriction, on a $(\mathbb{N}, d_u) \simeq (S, d_u)$ (voir 2.2.9).

Si E est un espace vectoriel de dimension finie n, on a remarqué dans 1.3.5 qu'il existe un isomorphisme $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (qui dépend d'une base choisie dans E) qui est une isométrie si l'on choisit les normes $\|\ \|_p$ sur E et $\mathbb{R}^n$ (E et $\mathbb{R}^n$ sont isométriquement isomorphes, comme on l'a remarqué dans 1.6.12). Par suite, on a $E \simeq \mathbb{R}^n$ (E et $\mathbb{R}^n$ sont donc aussi isométriquement homéomorphes ; on a l'implication : *isométriquement isomorphes* $\Longrightarrow$ *isométriquement homéomorphes*) ; en fait, on verra dans 5.1.23 que c'est encore vrai quelle que soit la norme choisie sur E. En particulier, $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, $M_{m\times n} \simeq \mathbb{R}^{m\times n}$ et $\mathbb{R}_n[X] \simeq \mathbb{R}^{n+1}$ (voir 1.3.6 et 1.5.7).

2.3.16 Remarque (*en exercice*) : La réciproque de 2.3.14 est fausse. Cependant, dans le cas d'une application linéaire, on verra (dans 2.4.1) que "continue=lipschitzienne".

Tout comme dans 1.6.16, on peut traduire utilement les comparaisons topologiques (voir 2.2.4) de distances en termes d'applications continues :

2.3.17 Proposition : Soit d et d' deux distances sur un ensemble E. On a les équivalences suivantes :

- d et d' sont topologiquement comparables ssi l'une des deux applications $id : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ ou $id : (E,d') \longrightarrow (E,d)$ est continue.
- $d \overset{Top}{\sim} d'$ ssi l'application $id : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ est un homéomorphisme.

Preuve : Il suffit de traduire sur les identités les définitions de 2.2.4. □

2.3.18 Remarques (*en exercice*) : On retrouve alors l'implication $d \overset{Met}{\sim} d' \Longrightarrow d \overset{Top}{\sim} d'$, grâce à 1.6.16 et 2.3.14.

Comme conséquence immédiate de 2.3.17, on obtient : deux distances sur un même ensemble E sont topologiquement équivalentes ssi elles donnent les mêmes applications continues définies sur E.

2.3.19 Proposition : Soit E un e.v.n. ; alors les applications $\sigma : E \times E \longrightarrow E$: $(x,y) \mapsto x+y$ et $m : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ sont continues (si l'on munit les deux produits $E \times E$ et $\mathbb{R} \times E$ de l'une des normes produit équivalentes $\|\ \|_p$ citées dans 1.3.2 et 1.5.7).

Preuve : Pour σ, cela résulte de 1.6.13 et 2.3.14. Pour m, soit (λ_n, x_n) une suite dans $\mathbb{R} \times E$, que l'on suppose converger vers (λ, x) (c'est-à-dire, d'après 2.1.13, que les suites (λ_n) et (x_n) convergent respectivement vers λ (dans $\mathbb{R}$) et x (dans E)). Il s'agit donc de prouver que la suite $(\lambda_n x_n)$ converge dans E vers λx : on utilise l'inégalité $\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n(x_n - x) + (\lambda_n - \lambda)x\| \leq |\lambda_n|\,\|x - x_n\| + |\lambda_n - \lambda|\,\|x\|$, puisque, par hypothèse, on a $\|x - x_n\| \longrightarrow 0$, $|\lambda - \lambda_n| \longrightarrow 0$ et $|\lambda_n| \longrightarrow |\lambda|$ (pour la dernière limite, on utilise la continuité des normes (voir 1.6.8 et 2.3.14). □

2.3.20 Exemples (*en exercices*) : Dans un e.v.n., les translations $\tau_a(x) = x + a$ sont des homéomorphismes.

Par contre, l'application m de 2.3.19 n'est pas lipschitzienne (voir 1.6.14). De la même façon, dans un espace préhilbertien, l'application produit scalaire

$(x, y) \mapsto < x, y >$ est continue (alors qu'elle n'est pas lipschitzienne (voir 1.6.10, ainsi que 2.4.9).

Soit $f : (E, \gamma) \longrightarrow (F, \delta)$ une application continue ; alors il existe une distance d sur E qui est topologiquement équivalente à γ et telle que $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ soit lipschitzienne.

2.3.21 Proposition : Soit E et F deux espaces métriques ; alors la limite d'une suite de fonctions continues $E \longrightarrow F$, qui converge uniformément, est elle-même continue. De plus, si F est un e.v.n., l'espace $\mathcal{C}(E, F)$ des applications continues de E dans F est un espace vectoriel.

Preuve : Soit (f_n) une suite d'applications continues de E vers F qui converge uniformément (*i.e.* au sens de d_∞ : voir 2.1.17) vers une application $f : E \longrightarrow F$; on doit montrer que f est continue. Soit donc $x \in E$ et $\varepsilon > 0$ fixés ; trouvons un $\eta > 0$ tel que l'on ait $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tout $y \in E$ vérifiant $\delta(x, y) < \eta$ (en notant δ et d les distances sur E et F respectivement). Comme $f_n \xrightarrow{d_\infty} f$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $d_\infty(f_n, f) < \varepsilon/3$ pour tout $n \geq N$. Soit alors n_0 un entier vérifiant $n_0 \geq N$; on a donc $d_\infty(f_{n_0}, f) < \varepsilon/3$. Par ailleurs, comme f_{n_0} est continue en x, il existe un $\eta_0 > 0$ tel que l'on ait $d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) < \varepsilon/3$ pour tout $y \in E$ vérifiant $\delta(x, y) < \eta_0$. Par suite, si $y \in E$ vérifie $\delta(x, y) < \eta_0$, on a $d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + d(f_{n_0}(y), f(y)) \leq 2d_\infty(f, f_{n_0}) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) < 3\varepsilon/3 = \varepsilon$. On peut donc prendre $\eta = \eta_0$.

Prouvons que $\mathcal{C}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de E dans F. Il s'agit donc de montrer que l'application identiquement nulle est continue (ce qui va de soi), que la somme de deux applications continues est continue et que le produit d'une application continue par un scalaire est encore continu. Fixons donc $f, g \in \mathcal{C}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; comme dans 1.6.15, on utilise le fait que $f + g = \sigma \circ h$, où $\sigma : F \times F \longrightarrow F$ est l'addition de F et $h : E \longrightarrow F \times F : x \mapsto (f(x), g(x))$ et que $\lambda f = m_\lambda \circ f$, puisque σ et m_λ sont continues (car lipschitziennes). Ceci dit, on peut évidement prouver ces deux derniers points à l'aide de suites convergentes. □

2.3.22 Remarque : On interprétera topologiquement le premier résultat ci-dessus, en disant que $\mathcal{C}(E, F)$ est un fermé de $\mathcal{F}(E, F)$ pour la quasi-distance d_∞ de la convergence uniforme ; voir 2.1.17 et 3.1.25.

2.3.23 Exemple (*en exercice*) : Par contre, la convergence uniforme ne respecte pas le fait d'être de classe C^1 (voir 0.4.2) : donner une suite de fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui converge uniformément vers la fonction $f(x) = |x|$.

4. APPLICATIONS LINEAIRES CONTINUES

Soit E et F des e.v.n. ; notons $\mathcal{L}(E, F)$ (resp. $\mathcal{L}_c(E, F)$) l'espace des applications linéaires (resp. linéaires continues) de E dans F ; alors $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$: cela résulte de l'égalité $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F) \cap \mathcal{C}(E, F)$.

2.4.1 Proposition : Soit E et F deux e.v.n. (on notera leurs normes respectives par le même symbole $\|x\|$, se repérant à la variable x pour savoir s'il s'agit de la norme sur E ou sur F) et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Les énoncés

suivants sont équivalents :

(1) u est continue,
(2) u est continue en 0,
(3) u est bornée sur la boule unité $B'(0,1) = \{x \in E \mid ||x|| \leq 1\}$ de E,
(4) il existe un réel $k > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, on ait $||u(x)|| \leq k||x||$,
(5) u est lipschitzienne.

Preuve : (1) $\Longrightarrow$ (2) : évident.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : comme u est linéaire et continue en 0, il existe un $\eta > 0$ tel que l'on ait l'implication $||x|| \leq \eta \Longrightarrow ||u(x)|| \leq 1$ (voir 2.3.3) ; d'où les implications : $||x|| \leq 1 \Longrightarrow ||\eta x|| \leq \eta \Longrightarrow ||u(\eta x)|| \leq 1 \Longrightarrow ||u(x)|| \leq 1/\eta$. Par suite, l'image $u(B'(0,1)) = \{u(x) \mid ||x|| \leq 1\}$, de $B'(0,1)$ par u, est une partie bornée de F.

(3) $\Longrightarrow$ (4) : par hypothèse, il existe un $k > 0$ tel que $||u(x)|| \leq k$ pour tout $x \in B'(0,1)$. Si $x \neq 0$, on a $x/||x|| \in B'(0,1)$ et donc $||u(x)|| = ||x||\,||u(x/||x||)|| \leq ||x||k$; cette inégalité est encore trivialement vraie pour $x = 0$!

(4) $\Longrightarrow$ (5) : on utilise la linéarité de u pour écrire $||u(x) - u(y)|| = ||u(x-y)|| \leq k||x-y||$ pour tout $x, y \in E$.

(5) $\Longrightarrow$ (1) : résulte de 2.3.14. □

2.4.2 Remarque : On verra dans 5.1.29 qu'en dimension finie toute application linéaire est continue (on retrouve donc (voir 1.6.5) que les projections canoniques $\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, qui sont bien sûr continues d'après 2.1.13, sont même lipschitziennes, puisqu'elles sont linéaires). Ainsi, $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$; dans le cas général, voir 2.4.3 ci-dessous.

2.4.3 Proposition : Posons $||u|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||u(x)||$ pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$; on a l'équivalence : u continue $\overset{\star}{\Longleftrightarrow} ||u|| < +\infty$. De plus, pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$, on a $||u(x)|| \leq ||u||\,||x||$ pour tout $x \in E$ (en fait, $||u||$ est le plus petit réel $k \geq 0$ vérifiant $||u(x)|| \leq k||x||$ pour tout $x \in E$) ; et l'application $u \mapsto ||u||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$, que l'on appelle *norme d'opérateur* de u.

Preuve : L'équivalence $\overset{\star}{\Longleftrightarrow}$ traduit le fait, établi dans 2.4.1, qu'une application linéaire est continue ssi elle est bornée sur la boule unité $B'(0,1)$ de E.

Supposons u continue. De l'inégalité $||u(x)|| \leq ||u||$, vraie (par définition de $||u||$) pour tout $x \in B'(0,1)$, on déduit, comme dans l'implication (3) $\Longrightarrow$ (4) de 2.4.1, que l'on a $||u(x)|| \leq ||u||\,||x||$ pour tout $x \in E$. Enfin, si $k \geq 0$ vérifie aussi $||u(x)|| \leq k||x||$ pour tout $x \in E$, on a $||u(x)|| \leq k$ pour tout x vérifiant $||x|| \leq 1$ et donc $||u|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||u(x)|| \leq k$.

Pour prouver que la fonction $u \mapsto ||u||$ vérifie les axiomes (N_2) et (N_3) des normes, on procède comme pour la norme $||\ ||_\infty$ sur l'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ (voir 1.3.8) ; pour l'axiome (N_1), supposant que $||u|| = 0$, on doit prouver que l'on a $u = 0$, *i.e.* $u(x) = 0$ pour tout $x \in E$. Mais ceci résulte immédiatement de l'inégalité $||u(x)|| \leq ||u||\,||x||$ établie ci-dessus pour tout $x \in E$ (voir aussi 1.3.9 et 2.4.4). □

2.4.4 Remarques (*en exercices*) : On a $||v \circ u|| \leq ||v||\,||u||$, pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}_c(F,G)$. On remarque que, si $E \neq \{0\}$, on a $||u|| = \sup_{||x||=1} ||u(x)|| = \sup_{x \neq 0} \dfrac{||u(x)||}{||x||}$ pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$.

Se reporter à 1.3.6 et à 1.3.9, où l'on montre que la norme d'opérateurs sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ "correspond", pour le choix de la norme $||\ ||_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, à la

norme $||A|| = \sup_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, sur $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, qui vérifie $||AB|| \leq ||A||\,||B||$ (traduction, dans $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, de $||v \circ u|| \leq ||v||\,||u||$).

Pour la recherche d'une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ où $E \neq \{0\}$, il est hors de question d'utiliser la norme de la convergence uniforme $\sup_{x\in E} ||u(x)||$ (voir 2.1.20), puisque, **hormis l'application linéaire identiquement nulle, aucune application linéaire n'est bornée** (l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que l'on ait $||u(x)|| \leq \alpha$ pour tout $x \in E$ est impossible : pour le voir, il suffit de choisir des $x = ny$, avec $y \neq 0$). Par contre, on voit dans 2.4.1, que les applications linéaires continues ont la propriété d'être bornées sur la boule unité $B'(0,1)$ de E ; on peut donc utiliser la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{F}_b(B'(0,1),F)$ (voir 2.1.20) pour définir la norme $||u|| = \sup_{||x||\leq 1} ||u(x)||$ sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ (cette norme est tout-à-fait appropriée, puisque $B'(0,1)$ engendre linéairement E (on a $0 = 0y$ avec $y \in B'(0,1)$, et si $x \neq 0$, alors $x = ||x||y$ avec $y = x/||x|| \in B'(0,1)$), de sorte que toute application linéaire est entièrement déterminée par ses valeurs sur $B'(0,1)$).

S'inspirant de ce qui précède, la norme d'opérateur peut donc être présentée comme une norme "image réciproque" (au sens de 1.3.4) : $||u|| = ||j(u)||_\infty$, où $j : \mathcal{L}_c(E,F) \longrightarrow \mathcal{F}_b(B'(0,1),F)$ est l'application, trivialement linéaire et injective qui, à tout u, associe sa restriction bornée à $B'(0,1)$.

2.4.5 Théorème (annoncé dans 2.2.10) : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, N et N' deux normes sur E. On a alors l'équivalence : $N \sim N' \iff N \overset{Top}{\sim} N'$ (où $N \overset{Top}{\sim} N'$ signifie que les distances respectivement associées à N et N' sont topologiquement équivalentes ; voir 2.2.4).

<u>Preuve</u> : Résulte du fait que l'application $id : E \longrightarrow E$ est linéaire, et donc que les applications $id : (E,N) \longrightarrow (E,N')$ et $id : (E,N') \longrightarrow (E,N)$ sont continues ssi elles sont lipschitziennes (d'après 2.4.1). Il reste donc à traduire à l'aide de 1.6.16 et 2.3.17. □

2.4.6 <u>Remarque</u> : Dorénavant, on ne parlera donc plus que d'équivalence de normes ; on retiendra donc que deux normes sur un même espace vectoriel E sont équivalentes ssi elles possèdent les mêmes suites convergentes dans E, ssi elles donnent les mêmes applications continues définies sur E (voir 2.3.18).

2.4.7 Proposition : Soit $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire (où E, F et G sont trois e.v.n. (on munit $E \times F$ de la norme produit $||\ ||_\infty$ (voir 1.3.2 et 1.5.7)). Les énoncés suivants sont équivalents :

(1) B est continue,

(2) B est continue en $(0,0)$,

(3) B est bornée sur la boule unité $B'_\infty((0,0),1) = \{(x,y) \in E \times F \mid ||(x,y)||_\infty \leq 1\} = \{(x,y) \in E \times F \mid ||x|| \leq 1 \text{ et } ||y|| \leq 1\}$ de $E \times F$ (voir 4.4.8),

(4) il existe un réel $k > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in E \times F$, on ait $||B(x,y)|| \leq k||x||\,||y||$.

<u>Preuve</u> :

(1) $\Longrightarrow$ (2) : évident.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : comme B est bilinéaire et continue en $(0,0)$, il existe un $\eta > 0$ tel que l'on ait l'implication $||(x,y)||_\infty \leq \eta \Longrightarrow ||B(x,y)|| \leq 1$; d'où les implications : $||(x,y)||_\infty \leq 1 \Longrightarrow ||\eta(x,y)||_\infty \leq \eta \Longrightarrow ||B(\eta x, \eta y)|| \leq 1 \Longrightarrow ||B(x,y)|| \leq 1/\eta^2$. Par suite, l'image de la boule $B'_\infty((0,0),1)$ par B est une partie bornée de G.

(3) $\Longrightarrow$ (4) : par hypothèse, il existe un $k > 0$ tel que $||B(x,y)|| \leq k$ pour tout $(x,y) \in B'_\infty((0,0),1)$. Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on a $(x/||x||, y/||y||) \in B'_\infty((0,0),1)$, de sorte que l'on a $||B(x,y)|| = ||x||\,||y||\,||B(x/||x||, y/||y||)|| \leq ||x||\,||y||k$; cette inégalité est trivialement encore vraie lorsque $x = 0$ ou $y = 0$.

(4) $\Longrightarrow$ (1) : soit (x_n, y_n) une suite de points de $E \times F$ qui converge vers (x,y), *i.e.* telle que (x_n) converge vers x dans E et (y_n) converge vers y dans F. Montrons que la suite $(B(x_n, y_n))$ converge vers $B(x,y)$ dans G en s'inspirant des preuves de la continuité de la multiplication externe m d'un e.v.n. et du produit scalaire d'un espace préhilbertien (voir 2.3.19 et 2.3.20) : cela résulte de l'inégalité $||B(x_n,y_n) - B(x,y)|| = ||B(x_n - x, y_n) + B(x, y_n - y)|| \leq k\big(||x_n - x||\,||y_n|| + ||x||\,||y_n - y||\big)$, puisque, par hypothèse, $||x_n - x|| \longrightarrow 0$ et $||y_n - y|| \longrightarrow 0$ (on a $||y_n|| \longrightarrow ||y||$, puisqu'une norme est continue). □

2.4.8 Remarques : Comme dans 2.4.3, pour B est bilinéaire, on pose $||B|| = \sup_{||(x,y)||_\infty \leq 1} ||B(x,y)||$; cela définit une norme sur l'espace $\mathcal{B}_c(E,F;G)$ des applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G (on a B continue ssi $||B|| < +\infty$, et $||B||$ est le plus petit réel $k \geq 0$ vérifiant $||B(x,y)|| \leq k||x||\,||y||$ pour tout $(x,y) \in E \times F$).

Dans le cas où $E \neq \{0\}$ et $F \neq \{0\}$, on a $||B|| = \sup_{||x||=||y||=1} ||B(x,y)|| = \sup_{x\neq 0, y\neq 0} \dfrac{||B(x,y)||}{||x||\,||y||}$.

Voir 5.1.31 où l'on montre qu'en dimension finie, toute application bilinéaire est continue.

Contrairement au cas des applications linéaires, une application bilinéaire continue n'est pas forcément lipschitzienne : c'est le cas du produit scalaire d'un espace préhilbertien (voir 1.6.10 et 2.3.20,et surtout 6.1.4).

2.4.9 Exemples (*en exercices*) : Retrouver, à l'aide des axiomes (4) de 2.4.1 et 2.4.7, que, dans un e.v.n., l'addition σ et la multiplication externe m sont continues (voir 2.3.19) ; même chose pour le produit scalaire $<,>$ d'un espace préhilbertien (voir 2.3.20). Toutes ces applications sont de norme d'opérateur 1.

L'équivalence (4) $\Longleftrightarrow$ (5) de 2.4.1 nous assure du fait qu'une application linéaire (entre e.v.n.) est de norme (d'opérateur) $\leq k$ ssi elle est k-lipschitzienne. Par exemple, pour tout $x \in E$, l'application linéaire $eval_x : \mathcal{L}_c(E,F) \longrightarrow F : u \mapsto u(x)$ est $||x||$-lipschitzienne. De même, si p_F est le projecteur orthogonal (voir 1.4.8) sur un sous-espace F de dimension finie d'un espace préhilbertien, on a $||p_F|| \leq 1$; et même $||p_F|| = 1$ lorsque $F \neq \{0\}$.

Sur l'espace des polynômes $\mathbb{R}[X]$ (identifié ici à l'espace des fonctions polynomiales réelles ...voir 0.3.5), on considère les normes $||P||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$, $||P||_1 = \sum_i |a_i|$ et $||P|| = \sup_i |a_i|$ (où $P(x) = \sum_i a_i x^i$). Etudier la continuité des applications $u(P) = P'$ et $v(P) = P(1)$ pour chacune de ces normes.

L'application $w(f) = f(0)$ est continue sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $||\ ||_\infty$ ...mais ne l'est pas pour les normes $||\ ||_1$ et $||\ ||_2$. Par contre, l'application $\mu : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$ est continue pour toutes les normes $||\ ||_p$.

On considère l'application $u : \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : f \mapsto f'$, le second espace étant muni de la norme $||\ ||_\infty$ (voir 0.4.2 pour la définition du premier) ; alors u n'est pas continue si l'on munit $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $||\ ||_\infty$, alors qu'elle l'est, si l'on munit cet espace de la norme $||f|| = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$ (voir 1.3.14).

Soit E un e.v.n. et $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue non identiquement nulle ; on a $d(x, Ker\, u) = |u(x)|/||u||$ pour tout $x \in E$ (voir 0.3.2 et 1.1.4).

Soit E, E', G des e.v.n. et $\phi : E \longrightarrow E'$ un isomorphisme isométrique (*i.e.* une isométrie bijective et linéaire (voir 1.6.12), donc aussi un homéomorphisme isométrique (voir 2.3.15)) ; alors l'application $\widehat{\phi} : \mathcal{L}_c(E', G) \longrightarrow \mathcal{L}_c(E, G)$, définie par $\widehat{\phi}(v) = v \circ \phi$, est aussi un isomorphisme isométrique (pour les normes d'opérateur) ; *i.e.*, si E et E' sont isomorphes isométriquement, il en est de même des espaces $\mathcal{L}_c(E, G)$ et $\mathcal{L}_c(E', G)$.

Dans ce qui suit, on munit $\mathbb{R}^n$ *de sa structure euclidienne (voir* 1.4.4*).*

1) Soit $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des applications linéaires définies respectivement par $u(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ et $v(\lambda) = \lambda a$, où $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ est fixé et où les x_k sont les coordonnées de x sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$; alors $||u|| = ||a||_2 = ||v||$.

2) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ symétrique (*i.e.* sa matrice A_u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est symétrique, *i.e.* égale à sa transposée) ; alors $||u|| = |\widehat{\lambda}|$ où $|\widehat{\lambda}| = \sup\{|\lambda| \mid \lambda$ est une valeur propre de $u\}$ (attention, ici, $\mathbb{R}^n$ est muni de sa norme euclidienne $|| \; ||_2$ et non pas de sa norme $|| \; ||_\infty$ comme dans 1.3.9, où l'on voit qu'alors $||u|| = ||A_u||$, et ceci, sans supposer que u est symétrique).

3) Soit $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et v^* l'endomorphisme adjoint de v (c'est l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $< v(x), y > = < x, v^*(y) >$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$; sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la transposée de celle de v). Alors $||v|| = ||v^* \circ v||^{1/2}$; on en déduit que $||v|| = ||v^*||$ et donc aussi que $||v \circ v^*|| = ||v|| \, ||v^*||$.

2.4.10 Remarque : Certains des exemples étudiés dans 2.4.9 nous permettent de retrouver (voir 2.2.9 et 2.2.10) le fait que, pour $p = 1, 2, \infty$, les normes $|| \; ||_p$ ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, ni sur $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et les l^p (voir 2.4.6). De même, les normes $||f||_\infty$ et $||f|| = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$ ne sont pas équivalentes sur l'espace $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.

Chapitre III
LA TOPOLOGIE DES ESPACES METRIQUES

1. TOPOLOGIE DES ESPACES METRIQUES (I)

Soit (E, d) un espace métrique, x un point de E et A une partie de E. Dans les définitions qui suivent on peut remplacer la distance d par une distance qui lui est topologiquement équivalente (d'après 2.2.7).

3.1.1 Définitions : On dit que x est *adhérent à A* s'il existe une suite de points de A qui converge vers x dans l'espace (E, d). On appelle *adhérence de A dans* (E, d), que l'on note $\overline{A}$, l'ensemble des points de E qui sont adhérents à A. On dit que A est *dense dans* (E, d) si l'on a $\overline{A} = E$ (on peut partout remplacer (E, d) par E s'il n'y a pas d'ambiguïté sur d).

3.1.2 Exemples (*en exercices*) : Si (x_n) est une suite convergente dans un espace métrique, sa limite est adhérente à l'ensemble $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

L'adhérence d'un sous-espace vectoriel d'un e.v.n. est encore un sous-espace vectoriel.

3.1.3 Proposition : On a l'équivalence : $x \in \overline{A} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists y \in A\ d(x, y) < \varepsilon$.

Preuve : $\Longrightarrow$: S'il existe une suite (x_n) dans E qui d-converge vers x, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $d(x, x_n) < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. On choisit donc $y = x_n$, pour un $n \geq N$.

$\Longleftarrow$: Si un tel $y \in A$ existe pour chaque $\varepsilon > 0$, en se limitant aux ε de la forme $1/n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient une suite (y_n) dans A qui vérifie $d(x, y_n) < 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc telle que $d(x, y_n) \longrightarrow 0$. □

3.1.4 Remarque : En traduisant 3.1.3 à l'aide de 1.2.1, on obtient l'équivalence : x est adhérent à $\overline{A}$ ssi toute d-boule ouverte centrée en x rencontre A.

3.1.5 Proposition : A étant une partie non vide d'un espace métrique (E, d), on a l'équivalence : $x \in \overline{A}$ ssi $d(x, A) = 0$ (voir 1.1.4 pour la définition de $d(x, A)$).

Preuve : Il s'agit, d'après 3.1.3, de prouver l'équivalence : $\forall \varepsilon > 0\quad \exists y \in A$ $d(x, y) < \varepsilon \iff d(x, A) = 0$. Pour l'implication $\Longleftarrow$, on applique 0.2.4 à la partie $\{d(x, y) \mid y \in A\}$ de $\mathbb{R}$. Pour l'implication $\Longrightarrow$, on utilise le fait que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) \leq d(x, y) < \varepsilon$ pour un certain $y \in A$; par suite, $d(x, A) = 0$! □

3.1.6 Définition : on dit que A est *fermée dans* (ou est *un fermé de*) (E, d) (on peut omettre d s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la distance) si $\overline{A} = A$. D'après 3.1.5, si A est un fermé non vide, on a l'équivalence : $x \in A \iff d(x, A) = 0$.

3.1.7 Exemples (*en exercices*) : Dans $(\mathbb{R}, d_u)$, les intervalles $]a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$, $]-\infty, b[$ et $]a, +\infty[$ ne sont pas fermés ; $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^c$ sont denses (tout réel est donc limite d'une suite de rationnels et limite d'une suite d'irrationnels ...et (voir 0.2.5, 1.2.3 et 3.1.4) il existe un rationnel et un irrationnel dans tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$), par suite, ils ne peuvent être fermés.

3.1.8 Proposition : L'adhérence $\overline{A}$ de A est le plus petit fermé de (E, d) qui contient A (c'est pourquoi on l'appelle aussi la *fermeture de A dans* (E, d)).

Preuve : L'inclusion $A \subset \overline{A}$ provient du fait que, pour tout $x \in A$, on peut écrire $x = \lim x_n$, avec $x_n = x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour prouver que $\overline{A}$ est fermé, on doit prouver que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, *i.e* que $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$, d'après ce qui précède. Soit $x \in \overline{\overline{A}}$ et $\varepsilon > 0$; on doit montrer qu'il existe un $y \in A$ vérifiant $d(x, y) < \varepsilon$ (d'après 3.1.3). Comme x est adhérent à $\overline{A}$, on sait, toujours par 3.1.3, qu'il existe un $z \in \overline{A}$ vérifiant $d(x, z) < \varepsilon/2$. Comme $z \in \overline{A}$, il existe aussi un $y \in A$ vérifiant $d(z, y) < \varepsilon/2$ et donc tel que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \varepsilon$; le y trouvé répond bien à la question.

Il reste enfin à prouver que $\overline{A}$ est bien le plus petit fermé contenant A. Soit donc F un autre fermé contenant A ; on doit prouver l'inclusion $\overline{A} \subset F$, *i.e* $\overline{A} \subset \overline{F}$ puisque F est fermé. Soit $x \in \overline{A}$ et $\varepsilon > 0$: il existe un $y \in A$ vérifiant $d(x, y) < \varepsilon$ (d'après 3.1.3). Comme le y trouvé est aussi dans F (car $A \subset F$), on en déduit (toujours par 3.1.3) que $x \in \overline{F}$. □

3.1.9 Exemples (*en exercices*) : On a l'implication $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$; en déduire les inclusions $\bigcup_i \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_i A_i}$ et $\overline{\bigcap_i A_i} \subset \bigcap_i \overline{A_i}$. Ces inclusions ne sont pas des égalités ; cependant, dans le cas d'une famille finie, on a $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ...on a aussi $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Si A est une partie d'un espace préhilbertien, on a $A^\perp = (\overline{A})^\perp$, voir 1.4.6.

3.1.10 Proposition : A est fermé ssi A contient toutes les limites de ses suites convergentes (on dit alors que A est fermé pour les limites de ses suites convergentes).

Preuve : On a les équivalences : A est fermé $\Longleftrightarrow A = \overline{A} \Longleftrightarrow \overline{A} \subset A$ (d'après 3.1.8). Il suffit donc d'expliciter la dernière inclusion : si $x = \lim x_n$, avec $x_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $x \in A$. □

3.1.11 Proposition : Dans un espace métrique (E, d), la boule fermée $B'_d(x, r)$ est un fermé de (E, d) et l'on a $\overline{B_d(x, r)} \subset B'_d(x, r)$ (voir 1.2.1).

Preuve : Soit (y_n) une suite de points de $B'_d(x, r)$ qui converge vers y dans (E, d) ; on a donc $d(x, y_n) \leq r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La continuité de l'application $d(x, -)$ (c'est une application partielle de la distance : voir 1.6.7,2.3.12 et 2.3.14) nous permet de passer à la limite dans cette inégalité : on obtient donc $d(x, y) \leq r$, si bien que $y \in B'_d(x, r)$. On a ainsi prouvé que la boule $B'_d(x, r)$ est un fermé de (E, d) (voir 3.1.10). $B'_d(x, r)$ étant un fermé contenant $B_d(x, r)$, elle contient aussi sa femeture (voir 3.1.8). □

3.1.12 Remarque : En général l'inclusion établie dans 3.1.11 n'est pas une égalité (considérer un espace discret et voir 1.2.3). Cependant, c'en est une dans le cas où la distance dérive d'une norme (E étant alors un espace vectoriel) : voir 3.1.13 ci-dessous.

3.1.13 Proposition : Soit (E, N) un e.v.n., $x \in E$ et $r > 0$. On a l'égalité $\overline{B(x,r)} = B'(x,r)$ pour la distance associée à la norme.

Preuve : Se référant à 3.1.11, on doit prouver que $B'(x,r) \subset \overline{B(x,r)}$. Soit $y \in B'(x,r)$. Si $y \in B(x,r)$, il n'y a rien à prouver puisque $B(x,r) \subset \overline{B(x,r)}$. Sinon, on a $N(y-x) = r$; posons alors $y_n = x + (1 - 1/n)(y-x)$ (y_n est un point du segment qui joint x à y dans E : il s'obtient en écrivant $\overrightarrow{xy_n} = (1-1/n)\overrightarrow{xy}$). On remarque que l'on a $y_n \in B(x,r)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puisque $N(y_n - x) = (1-1/n)N(y-x) < N(y-x) = r$. Comme $y = \lim y_n$ (car $N(y - y_n) = (N(y-x))/n$), on en déduit que $y \in \overline{B(x,r)}$. □

3.1.14 Proposition : Soit $\mathcal{F}_d$ l'ensemble de tous les fermés de l'espace métrique (E,d). Alors $\mathcal{F}_d$ vérifie les axiomes suivants : $\emptyset, E \in \mathcal{F}_d$ et $\mathcal{F}_d$ est stable par réunions finies et intersections quelconques.

Preuve : On a $\emptyset, E \in \mathcal{F}_d$ de façon évidente ($\emptyset$ n'ayant aucun point adhérent ; et tous les points de E étant adhérents à E).

Le fait que la réunion de deux fermés A et B soit fermée résulte immédiatement de l'égalité $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (voir 3.1.9), puisqu'ici $\overline{A} = A$ et $\overline{B} = B$. Soit (A_i) une famille de fermés ; vérifions que $\bigcap_i A_i$ est un fermé. Il suffit encore d'utiliser 3.1.9 : $\overline{\bigcap_i A_i} \subset \bigcap_i \overline{A_i} = \bigcap_i A_i$, l'égalité résultant du fait que les A_i sont fermés. □

3.1.15 Remarque : Utilisant 3.1.8 et le fait que les fermés sont stables par intersections, on peut dire que la fermeture d'une partie est l'intersection de tous les fermés qui la contiennent.

3.1.16 Exemples (*en exercices*) : Dans un espace métrique, les singletons $\{x\}$ sont fermés, donc toute partie finie est fermée ; et l'adhérence de toute partie bornée reste bornée.

Dans un espace discret, toute partie est fermée (donc $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^c$ ne sont pas denses dans $(\mathbb{R}, d_0)$; voir 3.1.7) ; il en est de même de toute partie de $\mathbb{Z}$ dans $(\mathbb{R}, d_u)$ (voir 2.1.3).

Dans $(\mathbb{R}, d_u)$, les intervalles $[a,b]$, $]-\infty, b]$ et $[a, +\infty[$ sont fermés et l'on a les égalités : $[a,b] = \overline{]a,b]} = \overline{[a,b[} = \overline{]a,b[}$, $]-\infty, b] = \overline{]-\infty, b[}$ et $[a, +\infty[= \overline{]a, +\infty[}$. On voit donc que les intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont fermés dans $\mathbb{R}$ au sens de 0.2.5, le sont aussi pour la distance d_u ; et que la fermeture dans $\mathbb{R}$ d'un intervalle de $\mathbb{R}$, telle qu'on l'a définie dans 0.2.5, correspond à sa fermeture topologique, telle qu'on la présente dans 3.1.8. L'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [1/n, 1]$ est-il fermé ?

Montrer que $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$, mais que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^2$ ... ni $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ (donner la fermeture des deux précédents), ceci pour les distances usuelles de $\mathbb{R}^2$ (voir 1.1.10).

Soit $f : (E,d) \longrightarrow (F, \delta)$ une application continue, alors le graphe $Gr(f) = \{(x,y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$ de f est un fermé de $E \times F$, muni de l'une des distances produit d_p. Toujours pour ces distances, la diagonale Δ_E de $E \times E$ est fermée dans $E \times E$.

On reprend notre espace fonctionnel $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ dans lequel on considère la partie $A = \{f \in E \mid f(0) > 0\}$. Alors A n'est pas fermée pour les distances d_p associées aux normes $\| \ \|_p$ (où $p = 1, 2, \infty$, voir 1.3.8). Pour chacune des distances

d_p, la distance $d_p(0, A)$ n'est atteinte en aucun point de A (voir 1.1.4).

Soit E un e.v.n. et $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire ; alors $Ker\, u$ est fermé ou dense dans E (voir 0.3.4 ; on verra dans 5.1.30, que ce noyau est toujours fermé dans le cas où E est de dimension finie, ou bien s'il est lui-même de dimension finie (voir 6.4.18)).

3.1.17 Proposition : Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, non vide et majorée (resp. et minorée), on a $\sup A \in \overline{A}$ (resp. $\inf A \in \overline{A}$). Par suite, pour toute partie A de $\mathbb{R}$, non vide et bornée, on a $\inf A \in \overline{A}$ et $\sup A \in \overline{A}$.

Preuve : Ces bornes existent bien dans $\mathbb{R}$, d'après 0.2.4. Notons $\alpha = \sup A$; le fait que α est adhérent à A résulte immédiatement de 3.1.3, puisqu'on a rappelé dans 0.2.4 que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $x \in A$ vérifiant $\alpha - \varepsilon < x$, et donc tel que $d_u(x, \alpha) = \alpha - x < \varepsilon$. On montre que $\inf A \in \overline{A}$, lorsque A est non vide et minorée, en appliquant ce qui précède à la partie $-A$ qui est non vide et majorée, sachant que $\sup(-A) = -\inf A$. □

3.1.18 Corollaire : Toute partie de $\mathbb{R}$, non vide, fermée et majorée (resp. et minorée) possède un plus grand élément (resp. un plus petit élément). Par suite, toute partie non vide, fermée et bornée de $\mathbb{R}$ possède un plus petit et un plus grand élément.

Preuve : Résulte immédiatement de 3.1.17, 3.1.6 et de 0.2.4. □

3.1.19 Corollaire : Tout ensemble d'entiers, non vide et majoré (resp. et minoré), possède un plus grand élément (resp. un plus petit élément).

Preuve : Il suffit d'utiliser 3.1.18 et le fait que toute partie de $\mathbb{Z}$ est un fermé de $(\mathbb{R}, d_u)$ (voir 3.1.16). □

3.1.20 Proposition : Soit $f, g : (E, d) \longrightarrow (E', d')$ deux applications continues ; soit aussi A une partie de E. Si f et g sont égales sur A (*i.e* si leurs restrictions à A sont égales), alors f et g sont égales sur $\overline{A}$.

Preuve : Soit $x \in \overline{A}$; il existe donc une suite (x_n) de points de A qui converge vers x dans (E, d). On utilise alors le fait que $f(x_n) = g(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (car $x_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et la continuité de f et g, pour en déduire que $f(x) = \lim f(x_n) = \lim g(x_n) = g(x)$. □

3.1.21 Remarque : On a montré ci-dessus que, si l'on a affaire à des applications continues, on peut prolonger des égalités sur A à $\overline{A}$; dans le cas où $E' = \mathbb{R}$, par un raisonnement analogue, on montre que l'on peut prolonger des inégalités strictes ou larges sur A en des inégalités larges sur $\overline{A}$ (attention, un passage à la limite d'inégalités strictes peut donner une inégalité large : voir 0.2.4).

3.1.22 Proposition : Soit $f : (E, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ une application continue et bornée et A une partie non vide de E. On a alors les égalités : $\sup_{x\in A} f(x) = \sup_{x\in\overline{A}} f(x)$ et $\inf_{x\in A} f(x) = \inf_{x\in\overline{A}} f(x)$.

Preuve : D'abord, l'hypothèse que f est bornée nous assure du fait que les bornes supérieures et inférieures en question existent dans $\mathbb{R}$ (en effet, s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que l'on ait $|f(x)| \leq \alpha$ pour tout $x \in E$, on a, *a fortiori*, $-\alpha \leq \inf_{x\in\overline{A}} f(x) \overset{*}{\leq} \inf_{x\in A} f(x) \leq \sup_{x\in A} f(x) \overset{*}{\leq} \sup_{x\in\overline{A}} f(x) \leq \alpha$, les inégalités

⋆ résultant de l'inclusion $A \subset \overline{A}$ ... voir 0.2.4).

Prouvons l'inégalité $\sup_{x\in\overline{A}} f(x) \leq \sup_{x\in A} f(x)$; d'après 0.2.4, il s'agit de vérifier que, pour tout $a \in \overline{A}$, on a $f(a) \leq \sup_{x\in A} f(x)$. Soit donc $a \in \overline{A}$; il existe une suite (x_n) de points de A qui converge vers a dans E. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in A$, on a donc $f(x_n) \leq \sup_{x\in A} f(x)$ pour tout n ; par un passage à la limite dans cette inégalité (possible puisque f est continue, voir 3.1.21), on obtient alors $f(a) \leq \sup_{x\in A} f(x)$. Pour les inf, on applique ce qui précède à l'application continue et bornée $-f$, puisque $\sup_{x\in A}(-(f(x)) = -\inf_{x\in A} f(x)$. □

3.1.23 Remarque : Comme on l'a remarqué au début de la preuve de 3.1.22, l'hypothèse que f est bornée est là pour que les égalités $\sup_{x\in A} f(x) = \sup_{x\in\overline{A}} f(x)$ et $\inf_{x\in A} f(x) = \inf_{x\in\overline{A}} f(x)$ soient vraies dans $\mathbb{R}$; on peut omettre cette hypothèse, et alors ces égalités seront vraies dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

3.1.24 Exemples (*en exercices*) : Soit $f(x) = x/(1+x^2)$; alors $\sup_{x\in]0,1[} f(x) = f(1) = 1/2$ (utiliser la croissance de f sur $[-1, 1]$). Plus généralement, étudier $\sup_{x\in]0,1[} f_\alpha(x)$, où $f_\alpha(x) = x/(1 + \alpha^2x^2)$, selon les valeurs du réel α.

Dans tout espace métrique, on a $d(x, A) = d(x, \overline{A})$ pour toute partie A et tout point x (voir 1.1.4).

On peut retrouver maintenant, grâce à 3.1.17 et 3.1.18, ce que l'on avait annoncé dans 0.2.4 : si A est une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée, l'ensemble de ses majorants possède un plus petit élément (appelé borne supérieure de A et noté $\sup A$) ...ceci dit, 3.1.17 et 3.1.18 utilisaient en fait 0.2.4 !

3.1.25 Proposition : Si E est un ensemble et F un espace métrique, l'ensemble $\mathcal{F}_b(E, F)$ est un fermé de $\mathcal{F}(E, F)$ muni de la quasi-distance de la convergence uniforme (voir 2.1.17 et 2.1.19) ; il en est de même de l'ensemble $\mathcal{C}(E, F)$, lorsque E est aussi un espace métrique (voir 2.3.21).

Preuve : Il s'agit de vérifier que la limite d'une suite d'applications bornées (resp. continues) qui converge uniformément est encore bornée (resp. continue). C'est justement ce que l'on a prouvé dans 2.1.19 et 2.3.21. □

2. TOPOLOGIE DES ESPACES METRIQUES (II)

Soit toujours (E, d) un espace métrique, x un point de E et A une partie de E. Dans les définitions qui suivent on peut remplacer la distance d par une distance qui lui est topologiquement équivalente (d'après 2.2.7 et 3.2.5).

3.2.1 Définition : On dit que x est *intérieur à* A si x n'est pas adhérent à A^c, *i.e* (en vertu de 3.1.4) s'il existe une d-boule ouverte centrée en x qui est incluse dans A. On appelle *intérieur de A dans* (E, d) (ou dans E s'il n'y a pas d'ambiguïté), que l'on note $\mathring{A}$, l'ensemble des points intérieurs à A.

3.2.2 Proposition : On a les relations $(\mathring{A})^c = \overline{A^c}$ et $(\mathring{\overline{A^c}}) = (\overline{A})^c$.

Preuve : La première relation est évidente puisque, par définition, on a $\mathring{A} = (\overline{A^c})^c$. Pour obtenir la seconde relation, il suffit d'appliquer la première à A^c. □

3.2.3 Exemples (*en exercices*) : Dans $(\mathbb{R}, d_u)$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^c$ sont d'intérieur vide. Tout sous-espace vectoriel propre d'un e.v.n. est d'intérieur vide.

3.2.4 Définition : on dit que A est *ouverte dans* (E,d) (ou est *un ouvert de* (E,d) ; on peut omettre d s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la distance) si $\overset{\circ}{A}= A$.

3.2.5 Proposition : A est ouverte dans (E,d) ssi A^c est fermée dans (E,d).

Preuve : On utilise 3.1.6, 3.2.2 et 3.2.4 : A est ouverte $\iff A = \overset{\circ}{A} \iff A^c = (\overset{\circ}{A})^c \iff A^c = \overline{A^c} \iff A^c$ est fermée. □

3.2.6 Proposition : L'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A est le plus grand ouvert de (E,d) qui est inclus dans A.

Preuve : Il suffit d'utiliser 3.1.8 et 3.2.5. □

3.2.7 Remarque : $\overset{\circ}{A}$ est donc un ouvert et on a toujours l'inclusion $\overset{\circ}{A} \subset A$; l'inclusion inverse $A \subset \overset{\circ}{A}$ équivaut donc au fait que $\overset{\circ}{A}= A$ *i.e* au fait que A est un ouvert, d'après 3.2.4. Se reportant à la terminologie donnée dans 3.2.1, on a donc les équivalences : A est un ouvert ssi tout point de A est intérieur à A ssi tout point de A est le centre d'une boule ouverte incluse dans A.

3.2.8 Proposition : La boule ouverte $B_d(x,r)$ est un ouvert de (E,d) et l'on a $B_d(x,r) \subset \overset{\circ}{B'_d}(x,r)$.

Preuve : Pour prouver que la boule ouverte est un ouvert de (E,d), on va montrer que son complémentaire est un fermé de (E,d), *i.e* que ce complémentaire est fermé pour les limites de ses suites convergentes (voir 3.1.10 et 3.2.5). Soit donc (y_n) une suite de points de $(B_d(x,r))^c$ (elle vérifie donc $d(x,y_n) \overset{\star}{\geq} r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) qui d-converge vers $y \in E$. On fait un passage à la limite dans l'inégalité $\overset{\star}{\geq}$, en utilisant la continuité de l'application partielle $d(x,-)$ (tout comme dans la preuve de 3.1.11) ; on obtient donc $d(x,y) \geq r$, si bien que $y \in (B_d(x,r))^c$.

La boule $B_d(x,r)$ étant un ouvert inclus dans la boule $B'_d(x,r)$, elle est contenue dans le plus grand ouvert inclus dans $B'_d(x,r)$, *i.e* dans $\overset{\circ}{B'_d}(x,r)$. □

3.2.9 Remarque : En général l'inclusion établie dans 3.2.8 n'est pas une égalité (considérer un espace discret et voir 1.2.3). Cependant, c'en est une dans le cas où la distance dérive d'une norme (E étant alors un espace vectoriel) : voir 3.2.10 ci-dessous.

3.2.10 Proposition : Soit (E,N) un e.v.n., $x \in E$ et $r > 0$. On a l'égalité $\overset{\circ}{B'}(x,r)= B(x,r)$.

Preuve : Prouvons que $\overset{\circ}{B'}(x,r) \subset B(x,r)$, ou encore, par passage au complémentaire, que $(B(x,r))^c \subset \left(\overset{\circ}{B'}(x,r)\right)^c = \overline{(B'(x,r))^c}$. Soit donc $z \in (B(x,r))^c$. Si $z \in (B'(x,r))^c$ (on a $(B'(x,r))^c \subset (B(x,r))^c$ puisque $B(x,r) \subset B'(x,r)$), il n'y a rien à prouver puisque $(B'(x,r))^c \subset \overline{(B'(x,r))^c}$. Sinon, on a $N(z-x) = r$; posons alors $z_n = x + (1 + 1/n)(z - x)$ (z_n s'obtient en écrivant

$\overrightarrow{xz_n} = (1+1/n)\overrightarrow{xz}$). On remarque que l'on a $z_n \in (B'(x,r))^c$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puisque $N(z_n - x) = (1+1/n)N(z-x) > N(z-x) = r$. Comme $z = \lim_n z_n$ (car $N(z-z_n) = N(z-x)/n$), on a bien $z \in \overline{(B'(x,r))^c}$. □

3.2.11 Exemples (*en exercices*) : On a les relations : $A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$; on en déduit les inclusions (strictes) : $\bigcup_i \overset{\circ}{A_i} \subset \overset{\circ}{\overline{\bigcup_i A_i}}$ et $\overset{\circ}{\overline{\bigcap_i A_i}} \subset \bigcap_i \overset{\circ}{A_i}$ (cette dernière est même une égalité dans le cas d'une famille finie) ...on a aussi $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.

Dans un espace discret toute partie est ouverte.

Dans $(\mathbb{R}, d_u)$, donner plusieurs bonnes raisons pour justifier les affirmations suivantes : les intervalles $]a,b]$, $[a,b[$, $[a,b]$, $]-\infty,b]$ et $[a,+\infty[$, ainsi que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^c$ ne sont pas ouverts ; les intervalles $]a,b[$, $]-\infty,b[$ et $]a,+\infty[$ sont des ouverts et l'on a $]a,b[=\overset{\circ}{]a,b]}=\overset{\circ}{[a,b[}=\overset{\circ}{[a,b]}$, $]-\infty,b[=\overset{\circ}{]-\infty,b]}$ et $]a,+\infty[=\overset{\circ}{[a,+\infty[}$. On voit donc que les intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont ouverts dans $\mathbb{R}$ au sens de 0.2.5, le sont aussi pour la distance d_u ; et que l'intérieur dans $\mathbb{R}$ d'un intervalle de $\mathbb{R}$, tel qu'on l'a défini dans 0.2.5, correspond à son intérieur topologique, tel qu'on le présente dans 3.2.6.

On définit $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$, la *frontière* de A. On a $Fr(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$. Calcul de frontières d'intervalles, de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{Q}^c$ pour les distances usuelle et discrète sur $\mathbb{R}$.

Montrer que, dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, mais que $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ...ni $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$; donner les intérieurs de ces derniers.

On reprend notre espace fonctionnel $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ dans lequel on considère la partie $A = \{f \in E \mid f(0) > 0\}$. Montrer que A est ouvert pour la distance d_∞, mais que ça n'en est pas un pour la distance d_1 (revoir 3.1.16).

Tout espace métrique est *séparé* : *i.e*, étant donné deux points distincts de cet espace, il existe deux ouverts disjoints, chacun contenant un de ces points.

3.2.12 Proposition : Soit $\mathcal{T}_d$ l'ensemble de tous les ouverts de l'espace métrique (E,d). Alors $\mathcal{T}_d$ vérifie les axiomes suivants : $\emptyset, E \in \mathcal{T}_d$ et $\mathcal{T}_d$ est stable par réunions quelconques et intersections finies.

Preuve : résulte de 3.1.14, 3.2.5 et des égalités $\emptyset^c = E$, $(\bigcup_i A_i)^c = \bigcap_i A_i^c$ et $(\bigcap_i A_i)^c = \bigcup_i A_i^c$ (voir 0.1.2). □

3.2.13 Proposition : A est un ouvert de (E,d) ssi A est une réunion de d-boules ouvertes.

Preuve : Si A est un ouvert, alors, pour tout $x \in A$, il existe un rayon $r_x > 0$ tel que $B_d(x, r_x) \subset A$; on peut donc écrire $\bigcup_{x \in A} B_d(x, r_x) \subset A$; en fait, cette inclusion est une égalité, puisque, pour tout $x \in A$, on a $x \in B_d(x, r_x)$. Inversement, si A est réunion de boules ouvertes, c'est un ouvert comme réunion d'ouverts (voir 3.2.8 et 3.2.12). □

3.2.14 Remarques : Par 3.2.13, on sait que les ouverts de (E, d) sont exactement les réunions de d-boules ouvertes.

Utilisant 3.2.6 et le fait que les ouverts sont stables par réunions, on peut dire que l'intérieur d'une partie est la réunion de tous les ouverts qui sont inclus dans ladite partie.

3.2.15 Exemples (*en exercices*) : Dans $(\mathbb{R}, d_u)$, retrouver à l'aide de 3.2.5 et 3.2.13 que toute partie de $\mathbb{Z}$ est fermée ; $\mathbb{Z}$ est d'intérieur vide (il n'est donc pas ouvert). $S = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est ni ouvert, ni fermé, son intérieur est vide et sa fermeture est $S' = S \cup \{0\}$. L'ensemble $\bigcap_n]-1/n, 1/n[$ est-il un ouvert ? Donner une partie de $\mathbb{R}$ pour laquelle on puisse construire 6 autres parties différentes à l'aide d'itérations des opérations de fermeture et d'intérieur.

3.2.16 Définitions : L'ensemble $\mathcal{T}_d$ définie dans 3.2.12 s'appelle la *topologie* associée à l'espace métrique (E, d) ; on dit aussi que $(E, \mathcal{T}_d)$ est *l'espace topologique* associé à l'espace métrique (E, d).

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}_d$ est une *base de la topologie* $\mathcal{T}_d$ (ou qu'elle *engendre* cette toplogie) si tout ouvert de E est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$ (on écrit alors $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}(\mathcal{B})$) ; c'est le cas de l'ensemble des boules ouvertes, d'après 3.2.13.

3.2.17 Exemples (*en exercices*) : La topologie de $\mathbb{R}$ associée à la distance usuelle d_u s'appelle la *topologie usuelle de* $\mathbb{R}$ et on la notera $\mathcal{T}_u$; elle est engendrée par l'ensemble des intervalles ouverts bornés (voir 0.2.5, 1.2.3 et 3.2.11). On parlera aussi de topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$ dans 3.4.6.

La topologie associée à la distance d sur $\mathbb{R}$, définie par $d(x, y) = |\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y|$, est engendrée par l'ensemble de tous les intervalles ouverts (voir 1.2.3) ; on a $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_u$, ce qui ne nous surprend pas, puisque d et d_u sont topologiquement équivalentes (voir 2.2.9 et 3.4.1). La topologie associée à la distance $\bar{d}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$, encore définie par $\bar{d}(x, y) = |\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y|$ en posant $\operatorname{Arctg}(-\infty) = -\pi/2$ et $\operatorname{Arctg}(+\infty) = +\pi/2$, est engendrée par les intervalles du type $]a, b[$, $[-\infty, b[$ et $]a, +\infty]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ (qui sont des boules ouvertes, voir 1.2.3) ; on vérifie facilement que, pour cette distance $\bar{d}$, $\mathbb{R}$ est un ouvert dense dans $\overline{\mathbb{R}}$. En conséquence (on avait fait une remarque analogue pour les intervalles de $\mathbb{R}$ dans 3.1.16 et 3.2.11), tous les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$, que l'on avait définis, dans 0.2.5, comme ouverts ou fermés dans $\overline{\mathbb{R}}$, sont des ouverts ou des fermés au sens de $\bar{d}$; et les notions d'intérieur et de fermeture dans $\overline{\mathbb{R}}$ d'un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$, telles qu'on les avait données dans 0.2.5, correspondent à ces mêmes notions topologiques, telles qu'on les présente dans 3.2.6 et 3.1.8.

La topologie d'un espace discret (*i.e* d'un ensemble E, muni de la distance discrète d_0) s'appelle la *topologie discrète* de E et on la notera $\mathcal{T}_0$; elle est engendrée par ses points (ou plutôt par ses singletons $\{x\}$), si bien que $\mathcal{T}_0 = \mathcal{P}(E)$.

Grâce à 3.2.11, on voit que, si $\mathcal{T}_p$ est la topologie sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ associée à la norme $\| \|_p$ (*i.e* à la distance d_p associée à $\| \|_p$), on a $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_\infty$ (on appelle $\mathcal{T}_\infty$ la *topologie de la convergence uniforme* et $\mathcal{T}_1$ la *topologie de la convergence en moyenne* (bien sûr, $\mathcal{T}_2$ est la *topologie de la convergence en moyenne quadratique*) ; voir 2.1.14).

3. VOISINAGES. BASES DE VOISINAGES

Soit toujours (E, d) un espace métrique et x un point de E.

3.3.1 Définition : On dit qu'une partie V de E est un *voisinage de* x *dans* (E, d), si x est intérieur à V, *i.e* si $x \in \mathring{V}$. Ainsi, d'après 3.2.7, une partie A de E

est un ouvert de (E, d) ssi A est voisinage de chacun de ses points.

3.3.2 Proposition : L'ensemble $\mathcal{V}_E(x)$ des voisinages de x vérifie les propriétés suivantes : (i) $V \in \mathcal{V}_E(x)$ ssi il existe une boule ouverte centrée en x et incluse dans V ; (ii) $E \in \mathcal{V}_E(x)$; (iii) $V, V' \in \mathcal{V}_E(x) \Longrightarrow V \cap V' \in \mathcal{V}_E(x)$; (iv) $V \in \mathcal{V}_E(x)$ et $V \subset W \Longrightarrow W \in \mathcal{V}_E(x)$.

<u>Preuve</u> : (i) : voir les définitions 3.2.1 et 3.3.1 ; (ii) : évident car E est ouvert ; (iii) : $V, V' \in \mathcal{V}(x) \iff x \in \overset{\circ}{V}$ et $x \in \overset{\circ}{V'} \iff x \in \overset{\circ}{V} \cap \overset{\circ}{V'} = \overset{\circ}{\overbrace{V \cap V'}} \iff V \cap V' \in \mathcal{V}(x)$ (pour l'égalité précédente, voir 3.2.11) ; (iv) : résulte immédiatement du fait que $\overset{\circ}{V} \subset \overset{\circ}{W}$ lorsque $V \subset W$. □

3.3.3 Définition : On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathcal{V}_E(x)$ est une *base de voisinages* de x (ou que $\mathcal{B}$ *engendre* $\mathcal{V}_E(x)$) si tout voisinage de x contient un élément de $\mathcal{B}$; par exemple (voir 3.2.1), l'ensemble des boules ouvertes centrées en x est une base de voisinages de x (en se limitant aux boules ouvertes, centrées en x, et de rayon $1/n$ (lorsque n varie dans $\mathbb{N}^*$), on obtient une base dénombrable de voisinages de x). L'ensemble de tous les voisinages ouverts de x, *i.e* de tous les ouverts contenant x, est aussi une base de voisinages de x (tout voisinage de x contient un voisinage ouvert de x : son intérieur).

Une base de voisinages d'un point suffit pour exprimer les propriétés topologiques en ce point ; par exemple (voir aussi les expressions de la continuité en un point dans 4.2.1 et 4.2.2) :

3.3.4 Proposition : Soit A une partie de E, x un point de E et (x_n) une suite de points de E. Alors 1) x est intérieur à A ssi il existe un voisinage de x inclus dans A ; 2) x est adhérent à A ssi tout voisinage de x rencontre A ; 3) (x_n) converge vers x ssi pour tout voisinage V de x, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $x_n \in V$.

<u>Preuve</u> : On exploite le fait que les boules ouvertes centrées en x forment une base de voisinages de x :

1) Si $x \in \overset{\circ}{A}$, il existe une boule ouverte $B(x, r)$ incluse dans A (voir 3.2.1) ; cette boule convient pour le voisinage cherché puisque c'est un ouvert de (E, d) (on peut dire aussi : si $x \in \overset{\circ}{A}$, alors A est un voisinage de x (puisque $\overset{\circ}{A} \subset A$)). Inversement, s'il existe un voisinage V de x inclus dans A, alors il existe une boule $B(x, r)$ incluse dans V (voir 3.3.2) et donc incluse dans A ; par suite x est intérieur à A (on peut dire aussi : si $x \in \overset{\circ}{V} \subset A$, on a $\overset{\circ}{V} \subset \overset{\circ}{A}$ (puisque $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A), si bien que $x \in \overset{\circ}{A}$).

2) Supposons que $x \in \overline{A}$ et soit V un voisinage de x ; alors il existe une boule $B(x, r)$ incluse dans V (voir 3.3.2) ; comme cette boule rencontre A (voir 3.1.4), V rencontre *a fortiori* A (car $\emptyset \neq A \cap B(x, r) \subset A \cap V$). Pour la réciproque, on utilise le fait que toute boule ouverte $B(x, r)$ est un voisinage de x.

3) On raisonne comme précédemment pour passer des boules ouvertes centrées en x aux voisinages de x. □

3.3.5 <u>Exemples</u> (*en exercices*) : L'ensemble des boules fermées centrées en x est une base de voisinages de x (elle engendre l'ensemble des boules ouvertes centrées en x).

Retrouver, à l'aide de 3.3.4 le fait (voir 2.1.3) que, si (x_n) est une suite convergente dans un espace métrique telle que l'ensemble $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit fini, alors elle est stationnaire.

Pour la distance $d(x,y) = |\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y|$ sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des d-voisinages de $x \in \mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles bornés $]a,b[$ où $a = \operatorname{tg}(\operatorname{Arctg} x - r)$ et $b = \operatorname{tg}(\operatorname{Arctg} x + r)$, avec $r > 0$ vérifiant $-\pi/2 < \operatorname{Arctg} x - r < \operatorname{Arctg} x + r < \pi/2$ (ainsi $a, b \in \mathbb{R}$). De même, pour la distance $\overline{d}(x,y) = |\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y|$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ (voir 1.2.3), l'ensemble des $\overline{d}$-voisinages de $x \in \overline{\mathbb{R}}$ est engendrée par ces mêmes $]a,b[$ lorsque $x \in \mathbb{R}$; par les $]a,+\infty]$ lorsque $x = +\infty$; par les $[-\infty, b[$ lorsque $x = -\infty$ (où a et b sont les réels définis comme ci-dessus) ... voir 1.2.3 ; on retrouve donc (voir 3.2.17) que $+\infty$ et $-\infty$ sont adhérents à $\mathbb{R}$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$. Bien sûr, $x_n \longrightarrow +\infty$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ ssi $x_n \longrightarrow +\infty$ au sens habituel (voir 0.1.3).

Enfin, pour la distance sur $\mathbb{N}'$ définie par $d'(n,m) = |1/(n+1) - 1/(m+1)|$ et $d'(n,+\infty) = 1/(n+1)$ (où $n, m \in \mathbb{N}$) (voir 2.3.15), les d'-voisinages de $+\infty$ dans $\mathbb{N}'$ sont engendrés par les $V_k = \{n \in \mathbb{N}' \quad n \geq k\}$, de sorte que l'on a $n \longrightarrow +\infty$ dans $(\mathbb{N}', d')$ ssi $n \longrightarrow +\infty$ au sens habituel.

4. COMPARAISON TOPOLOGIQUE DES DISTANCES (II)

Fixons un ensemble E et deux distances d et d' sur E. Voir la section II.2.

3.4.1 Proposition : On a les équivalences suivantes :

- d' est plus fine que d ssi l'on a l'inclusion $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{d'}$
- d et d' sont topologiquement comparables ssi l'une des deux inclusions $\mathcal{T}_{d'} \subset \mathcal{T}_d$ ou $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{d'}$ est vraie.
- $d \overset{Top}{\sim} d'$ ssi $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.

<u>Preuve</u> : Supposons que d' est plus fine que d, *i.e* que toute suite d'-convergente d-converge vers la même limite (voir 2.2.1). Montrons alors que tout fermé de (E,d) est un fermé de (E',d') (*i.e*, d'après 3.2.5, que tout ouvert de (E,d) est un ouvert de (E,d')) : Soit donc A un fermé de (E,d) et (x_n) une suite de points de A qui d'-converge vers x ; alors (x_n) d-converge aussi vers x, de sorte que x est dans A, qui est donc fermé dans (E,d'), d'après 3.1.10. Inversement, supposons que tout ouvert de (E,d) est un ouvert de (E',d'), et soit (x_n) une suite de points de E qui d'-converge vers x ; alors elle d-converge aussi vers x puisque toute d-boule $B_d(x,r)$ est un ouvert de (E,d) et donc un voisinage ouvert de x dans (E,d') ... il reste donc à utiliser 3.3.4. Les autres équivalences en résultent directement. □

3.4.2 Définition : Se référant à 2.2.1, 2.2.4 et à 3.4.1, on dira que $\mathcal{T}_{d'}$ est *plus fine que* $\mathcal{T}_d$ (ou que $\mathcal{T}_d$ est *moins fine que* $\mathcal{T}_{d'}$) si d' est plus fine que d, *i.e* si l'on a l'inclusion $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{d'}$ (*i.e* si tout ouvert pour d est un ouvert pour d'). On dira que les topologies $\mathcal{T}_d$ et $\mathcal{T}_{d'}$ sont *comparables*, lorsque l'une des deux inclusions $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{d'}$ ou $\mathcal{T}_{d'} \subset \mathcal{T}_d$ est vraie.

3.4.3 <u>Remarques</u> : Pour comparer deux topologies $\mathcal{T}_d$ et $\mathcal{T}_{d'}$, il suffit donc tout simplement de comparer leurs suites convergentes.

Le mot "topologique" dans l'expression "équivalence topologique" définie dans 2.2.4 trouve sa justification ici : deux distances sont topologiquement équivalentes ssi elles définissent la même topologie (*i.e* si elles ont les mêmes ouverts).

3.4.4 Proposition : S'il existe un réel $\alpha > 0$ vérifiant $d \leq \alpha d'$, on a $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{d'}$. Par suite on a l'implication : $d \overset{Met}{\sim} d' \Longrightarrow \mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$ (voir 1.5.1).

Preuve : Il suffit d'utiliser 2.2.2 et 3.4.1. □

3.4.5 Remarque : Comme on l'a déjà remarqué dans 2.2.10, la réciproque de l'implication de 3.4.4 est fausse (sauf dans le cas normable, voir 2.4.5).

3.4.6 Exemples : La topologie discrète $\mathcal{T}_0$ sur E est la plus fine de toutes les topologies $\mathcal{T}_d$ sur E, puisque $\mathcal{T}_0 = \mathcal{P}(E)$ (voir 3.2.17).

Sur $\mathbb{Z}$, les distances d_u et d_0 étant topologiquement équivalentes (leurs suites convergentes sont les suites stationnaires, voir 2.1.3), on a $\mathcal{T}_u = \mathcal{T}_0 = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Sur $\mathbb{R}^n$ les distances usuelles d_p définies dans 1.1.9 (elles sont métriquement équivalentes, d'après 1.5.5) définissent toutes la même topologie sur $\mathbb{R}^n$ appelée la ***topologie usuelle de*** $\mathbb{R}^n$ (et notée $\mathcal{T}_u^n$ ou $\mathcal{T}_u$). Attention, nous n'avons pas dit qu'elles donnaient les mêmes boules ; par contre, d'après 3.2.13, toute d_p-boule ouverte est une réunion de $d_{p'}$-boules ouvertes, lorsque $p, p' = 1, 2, \infty$. On parle aussi de topologie usuelle de $\mathbb{C}$, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$ (c'est en fait celle de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^{m\times n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n+1}$, voir 1.3.6).

Si l'on note $\mathcal{T}_p$ les topologies associées aux d_p sur l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ (voir 1.3.8), on a les inclusions $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_\infty$ (voir 1.5.7 et 3.4.4) ; on a vu dans 3.2.17 que l'on a $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_\infty$ (ce qui a déjà été implicitement vu dans 2.1.14, 2.2.9 et 2.4.10).

Chapitre IV
LA CLASSE DES ESPACES METRIQUES

1. LIMITE D'UNE APPLICATION

On se donne dans cette partie deux espaces métriques (E, d) et (E', d'), A une partie de E, a un point de E adhérent à A (l'existence d'un tel a implique que A est non vide), l un point de E' et $f : A \longrightarrow E'$ une application. On munit A et $A \cup \{a\}$ de la distance induite d (voir 1.1.6). On rappelle (voir 3.1.3 et 3.1.5) les équivalences : $a \in \overline{A} \iff \forall \eta > 0 \quad \exists x \in A \quad d(a, x) < \eta \iff d(a, A) = 0$.

4.1.1 Définition : On dit que f *tend vers* l *quand* x *tend vers* a, ce que l'on écrit $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ si elle vérifie la condition $(\overrightarrow{C_a})$ suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad \big(d(x, a) < \eta \Longrightarrow d'(f(x), l) < \varepsilon\big).$$

En fait, l'hypothèse $a \in \overline{A}$ implique l'unicité d'un tel l, lorsqu'il existe (en effet, se référant à la définition de $a \in \overline{A}$ rappelée ci-dessus, on a l'implication : $(f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ et $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l') \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad d(l, l') \leq d'(l, f(x)) + d'(f(x), l') < 2\varepsilon$; par suite, $d(l, l') = 0\big)$. C'est pourquoi, lorsque $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$, on dit aussi que l est *la limite de* f *au point* a, ce que l'on écrit $l = \lim_{x \to a} f(x)$. Voir (dans 4.1.8) ce qui se passe lorsque l'on ne suppose plus que $a \in \overline{A}$.

Pour éviter certaines ambiguïtés sur A, il nous arrivera d'écrire $A \ni x \to a$ au lieu de $x \to a$ dans les expressions précédentes.

4.1.2 Proposition : Selon que $a \in A$ ou non, on a les équivalences suivantes :

- Si $a \in A$; alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \iff f$ est continue au point a (alors $f(a) = l$).

- Si $a \in \overline{A} - A$, on considère l'application $g : A \cup \{a\} \longrightarrow E'$ définie par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$ et $g(a) = l$; alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \iff g$ est continue au point a (dans ce cas, on dit que g est *le prolongement de* f *à* $A \cup \{a\}$*, qui est continu au point* a (voir 0.4.1).

<u>Preuve</u> : Si $a \in A$, la condition $(\overrightarrow{C_a})$ est la condition (C_a) de 2.3.3 qui exprime la continuité de f au point a. Si $a \in \overline{A} - A$, on a $x \neq a$ pour tout $x \in A$; utilisant 2.3.4, la condition $(\overrightarrow{C_a})$ exprime aussi la continuité de g au point a. □

4.1.3 Proposition : Supposons qu'il existe une application $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ qui tend vers 0 quand x tend vers a et qui vérifie l'inégalité : $d'(f(x), l) \overset{\star}{\leq} h(x)$ pour tout $x \in A$. Alors f tend vers l quand x tend vers a.

<u>Preuve</u> : D'abord, on remarque que l'on a $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in A$. Soit $\varepsilon > 0$; par hypothèse, il existe un $\eta > 0$ tel que l'on ait l'implication : $d(x, a) < \eta \Longrightarrow 0 \leq h(x) < \varepsilon$, pour tout $x \in A$. Utilisant alors l'inégalité $\overset{\star}{\leq}$, on obtient *a fortiori* l'implication : $d(x, a) < \eta \Longrightarrow d'(f(x), l) < \varepsilon$, pour tout $x \in A$. □

4.1.4 Exemples (*en exercices*) : Calculer les limites suivantes (ici $E = \mathbb{R}^2$ et $E' = \mathbb{R}$ sont munis de leurs distances usuelles d_2 et d_u ; et $A = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$) :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(xy)^{2/3}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^3}{x^4+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{x^4+y^2}$$

4.1.5 Proposition : L'application f tend vers l quand x tend vers a ssi elle vérifie la condition : $\forall V' \in \mathcal{V}_{E'}(l) \quad \exists V \in \mathcal{V}_E(a) \quad f(A \cap V) \subset V'$ (voir 3.3.2 pour les notations).

Preuve : Traduisons la condition $(\overrightarrow{C_a})$ en termes de boules : pour toute boule ouverte $B_{d'}(l,\varepsilon)$, il existe une boule ouverte $B_d(a,\eta)$ vérifiant $f(A \cap B_d(a,\eta)) \subset B_{d'}(l,\varepsilon)$. La preuve de l'équivalence est alors rapide :

$\Longrightarrow$: Résulte du fait que les boules ouvertes centrées en un point forment une base de voisinages de ce point (voir 3.3.3). Soit donc $V' \in \mathcal{V}_{E'}(l)$: il existe un $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait $B_{d'}(l,\varepsilon) \subset V'$. Par hypothèse, il existe alors un $\eta > 0$ tel que l'on ait $f(A \cap B_d(a,\eta)) \subset B_{d'}(l,\varepsilon) \subset V'$. Il suffit donc de prendre $V = B_d(a,\eta)$.

$\Longleftarrow$: $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe un $V \in \mathcal{V}_E(a)$ vérifiant $f(A \cap V) \subset B_{d'}(l,\varepsilon)$; il suffit donc de choisir un $\eta > 0$ tel que $B_d(a,\eta) \subset V$ pour conclure (un tel η existe puisque V est un voisinage de a). □

4.1.6 Remarques : En fait, 4.1.5 n'est autre qu'une traduction de 4.1.2 (à l'aide de 4.2.2 et 4.3.5) en termes de topologie induite (voir la section IV.3) sur A (lorsque $a \in A$), ou bien sur $A \cup \{a\}$ (lorsque $a \in \overline{A} - A$, puisqu'alors $g = f$ sur A et $g(a) = l \in V'$).

Dans 4.1.5, on peut remplacer les ensembles de voisinages $\mathcal{V}_E(a)$ et $\mathcal{V}_{E'}(l)$ par des bases de voisinages de a et l respectivement (voir 3.3.3).

4.1.7 Exemples (*en exercices*) : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une application ($\overline{\mathbb{R}}$ étant muni de sa distance $\overline{d}$ définie dans 1.2.3). En considérant $\mathbb{R}$ comme un sous-espace métrique de $\overline{\mathbb{R}}$ (il est donc muni de sa topologie usuelle, puisque $\overline{d}$ est topologiquement équivalente à d_u sur $\mathbb{R}$ ... voir 2.2.9). L'expression $l = \lim_{x\to a} f(x)$ se traduit, selon les cas, par les énoncés : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$\lvert x-a\rvert < \eta \Longrightarrow \lvert f(x)-l\rvert < \varepsilon$	si $a, l \in \mathbb{R}$ (alors $f(a) = l$)
$x > \eta \Longrightarrow \lvert f(x)-l\rvert < \varepsilon$	si $a = +\infty$ et $l \in \mathbb{R}$
$\lvert x-a\rvert < \eta \Longrightarrow f(x) > \varepsilon$	si $a \in \mathbb{R}$ et $l = +\infty$ (alors $f(a) = +\infty$)
$x > \eta \Longrightarrow f(x) > \varepsilon$	si $a = l = +\infty$

On a des énoncés analogues en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$.

Si $f : (\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ est continue, elle se prolonge en une application continue $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \overline{d}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ ssi elle possède une limite finie en $+\infty$ (on a des énoncés analogues en remplaçant $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ par $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ou par $\overline{\mathbb{R}}$).

Si $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$, où E est un espace métrique, et $l \in E$, f tend vers l quand n tend vers $+\infty$ ssi le prolongement de f à $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ (obtenu en posant $f(+\infty) = l$) est continu (pour la distance d', voir 2.3.15 et 3.3.5) au point $+\infty$ ssi $l = \lim x_n$ dans E (où $x_n = f(n)$).

4.1.8 Remarques : Reprenons les notations précisées au début de cette section.

Lorsque $a \notin \overline{A}$, on dispose d'un $\eta = d(a, A) > 0$ vérifiant $d(a, x) \geq \eta$ pour tout $x \in A$, de sorte que l'ensemble $A(\eta) = \{x \in A \mid d(a,x) < \eta\}$ est vide ; par suite, pour tout $l \in E'$, tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in A(\eta)$, on a $d'(f(x), l) < \varepsilon$; ce qui prouve que, lorsque $a \notin \overline{A}$, on a $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ pour tout $l \in E'$!

Il est essentiel de souligner que, comme pour les limites de 4.1.7, toutes les définitions si délicates de limites rappelées dans 0.4.1 sont tout simplement des cas particuliers de cette unique notion de limite $\lim_{x \to a} f(x)$ (que l'on notera ici précisément $\lim_{A \ni x \to a} f(x)$ pour éviter toute ambiguïté, voir 4.1.1) ; c'est là une belle illustration de l'intérêt de l'abstraction !

En effet, lorsque $E = E' = \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ ayant au moins deux éléments distincts), $A \subset I$ et $a \in \overline{A}$ (donc $A \neq \emptyset$ et $a \in \overline{I}$), on obtient, quand les limites ci-dessous existent (dans les limites situées à gauche des égalités, on considère la restriction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$; alors que dans les limites situées à droite de ces égalités, il s'agit de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$) :

$\lim_{A \ni x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$ si $A = I \cap]-\infty, a[$ (alors a n'est pas l'extrémité gauche de I)

$\lim_{A \ni x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ si $A = I \cap]a, +\infty[$ (alors a n'est pas l'extrémité droite de I)

$\lim_{A \ni x \to a} f(x) = \lim_{a \neq x \to a} f(x)$ si $A = I - \{a\}$ (qui est égal à I lorsque $a \notin I$)

Evidemment, on a bien $a \in \overline{A}$ dans chacun des cas ci-dessus ; remarquons d'ailleurs que $A = \emptyset$ (ce qui est exclus par hypothèse) équivaut au fait que a est l'extrémité gauche de I (dans le premier cas), ou au fait que a est l'extrémité droite de I (dans le second cas) ; cas que l'on avait justement exclus dans 0.4.1 pour définir les limites à gauche et à droite de f en a. Signalons aussi que $I - \{a\} = \emptyset$ ssi $I = \{a\}$, cas que l'on a aussi exclus par hypothèse sur I. Bien sûr, lorsque a est l'extrémité droite de I (dans le premier cas) ou l'extrémité gauche de I (dans le second cas), cela ne pose aucun problème : en fait, ces deux extrémités sont obtenues avec $A = I - \{a\}$ dans les trois cas ! Et l'on retrouve donc ici (voir 0.4.1), la limite à gauche (pour l'extrémité droite de I) et la limite à droite (pour l'extrémité gauche de I) de f, comme cas particuliers de la limite stricte de f en ces points.

Par contre, lorsque $A = I$, mais avec $a \in I$, bien que l'on ait encore l'implication : $f(x) \underset{I \ni x \to a}{\longrightarrow} l \Longrightarrow f(x) \underset{a \neq x \to a}{\longrightarrow} l$, la réciproque est fausse : il suffit de considérer la fonction $f(x) = 1$ ou 0 selon que $x = 0$ ou non (définie sur $I = \mathbb{R}$) qui vérifie $f(x) \underset{0 \neq x \to 0}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) \underset{\mathbb{R} \ni x \to 0}{\not\longrightarrow} 0$, puisque $0 \in \mathbb{R}$ et f n'est pas continue au point 0 (la restriction de ce f à $[0, +\infty[$ aurait aussi bien fait l'affaire). Par contre, la restriction de ce f à $A = \mathbb{R}^*$, elle, vérifie $f(x) \underset{\mathbb{R}^* \ni x \to 0}{\longrightarrow} 0$ (puisqu'elle est identiquement nulle) ; on peut donc la prolonger continûment en 0 en posant $f(0) = 0$.

En plus de son côté "universel" souligné ci-dessus, cette notion générale de limite, $\lim_{x \to a} f(x)$, d'une application $f : A \longrightarrow E'$ en un point $a \in \overline{A}$ (où $A \subset E$, E et E' étant des espaces métriques quelconques), quand elle existe, permet essentiellement de prolonger cette application f, continûment en a, lorsque $a \in \overline{A} - A$. Cela n'est pas toujours possible : la fonction $h : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1/x$ ne peut se prolonger de façon continue en 0, puisque $h(x) \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$ et $h(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$;

En topologie, on cherche souvent à optimiser le "domaine de continuité" d'une application ; sous de bonnes hypothèses, on peut même prolonger continûment $f : A \longrightarrow E'$ à $\overline{A}$ (l'adhérence de A dans E) tout entier : voir les théorèmes de prolongement 6.5.1, 7.2.1 et 7.2.3.

2. APPLICATIONS CONTINUES (II)

Soit $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ une application (voir le début de la section II.3). Se reporter à 0.1.7 pour les images directes et les images réciproques.

4.2.1 Proposition : L'application $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ est continue au point $x \in E$ ssi, pour toute boule ouverte $B_{d'}(f(x),\varepsilon)$, il existe une boule ouverte $B_d(x,\eta)$ vérifiant $f(B_d(x,\eta)) \subset B_{d'}(f(x),\varepsilon)$.

Preuve : Il suffit de traduire en termes de boules la formulation (C_x) de la continuité au point x donnée dans 2.3.3. □

4.2.2 Proposition : L'application $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ est continue au point $x \in E$ ssi, pour tout $V' \in \mathcal{V}_{E'}(f(x))$, il existe un $V \in \mathcal{V}_E(x)$ vérifiant $f(V) \subset V'$ (en ce qui concerne les voisinages, se reporter à 3.3.1).

Preuve : $\Longrightarrow$: Soit $V' \in \mathcal{V}_{E'}(f(x))$; il existe donc une boule $B_{d'}(f(x),\varepsilon)$ telle que $B_{d'}(f(x),\varepsilon) \subset V'$ (d'après 3.3.2). L'application f étant supposée continue au point x, il existe une boule $B_d(x,\eta)$ vérifiant $f(B_d(x,\eta)) \subset B_{d'}(f(x),\varepsilon)$, et donc aussi $f(B_d(x,\eta)) \subset V'$. Comme $B_d(x,\eta) \in \mathcal{V}_E(x)$, on peut prendre $V = B_d(x,\eta)$.

$\Longleftarrow$: Soit $B_{d'}(f(x),\varepsilon)$; comme c'est un voisinage de $f(x)$ il existe, par hypothèse, un voisinage V de x tel que $f(V) \subset B_{d'}(f(x),\eta)$. Il suffit donc de choisir un $\eta > 0$ tel que la boule $B_d(x,\eta)$ soit incluse dans V (voir 3.3.2), et donc vérifie $f(B_d(x,\eta)) \subset f(V) \subset B_{d'}(f(x),\varepsilon)$, pour conclure. □

4.2.3 Proposition : L'application $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ est continue au point $x \in E$ ssi, pour tout $V' \in \mathcal{V}_{E'}(f(x))$, on a $\overset{-1}{f}(V') \in \mathcal{V}_E(x)$.

Preuve : Résulte de 4.2.2 et du fait que, si $V' \in \mathcal{V}_{E'}(f(x))$, on a les équivalences : $\exists V \in \mathcal{V}_E(x)\ \ f(V) \subset V' \Longleftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}_E(x)\ \ V \subset \overset{-1}{f}(V') \Longleftrightarrow \overset{-1}{f}(V') \in \mathcal{V}_E(x)$. □

4.2.4 Remarque : On a utilisé dans 4.2.2 le fait que l'ensemble des boules ouvertes centrées en un point engendre l'ensemble des voisinages de ce point ; bien sûr, on peut utiliser des bases de voisinages quelconques de x et de $f(x)$ dans l'énoncé de 4.2.2 (voir 3.3.3). Par contre, on ne gagnerait rien dans 4.2.3 en se limitant par exemple à l'ensemble des boules ouvertes centrées en $f(x)$, l'image réciproque d'une telle boule n'étant pas forcément une boule.

4.2.5 Proposition : Soit $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ une application ; les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue.

(ii) Pour tout ouvert U' de E', $\overset{-1}{f}(U')$ est un ouvert de E.

(iii) Pour tout fermé F' de E', $\overset{-1}{f}(F')$ est un fermé de E.

(iv) Pour toute partie A de E, on a l'inclusion $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Preuve : (i) $\Longleftarrow$ (ii) : Montrons que f est continue en un point $a \in E$ donné. Soit donc V' un voisinage de $f(a)$; alors $f(a) \in \overset{\circ}{V'}$ et $\overset{-1}{f}(\overset{\circ}{V'})$ est un ouvert (par hypothèse) contenant a, c'est donc un voisinage de a. Il reste donc à utiliser l'inclusion $\overset{-1}{f}(\overset{\circ}{V'}) \subset \overset{-1}{f}(V')$ pour en déduire (voir 3.3.2) que $\overset{-1}{f}(V')$ est un voisinage de a.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) : Résulte de 3.2.5 et du fait que l'image réciproque commute aux complémentaires : $\overset{-1}{f}(A^c) = \big(\overset{-1}{f}(A)\big)^c$ (voir 0.1.7).

(i) $\Longrightarrow$ (iv) : Soit $x \in \overline{A}$; on doit montrer que l'on a $f(x) \in \overline{f(A)}$. Par hypothèse, il existe une suite (x_n) dans A qui d-converge vers x. L'application $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ étant continue, la suite $(f(x_n))$ d'-converge vers $f(x)$. Par suite $f(x) \in \overline{f(A)}$ (puisque $f(x_n) \in f(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) : Soit F' un fermé de (E',d') ; prouvons que $\overset{-1}{f}(F')$ est un fermé de (E,d). Posons $A = \overset{-1}{f}(F')$; utilisant (iv) et les inclusions rappelées dans 0.1.7, on peut écrire : $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(\overset{-1}{f}(F'))} \subset \overline{F'} = F'$, et donc aussi $\overline{A} \subset \overset{-1}{f}(f(\overline{A})) \subset \overset{-1}{f}(F') = A$, de sorte que $A = \overline{A}$. □

4.2.6 Exemples (*en exercices*) : Soit E un espace métrique, $A \subset E$ et $1_A : E \longrightarrow \mathbf{2}$ sa fonction caractéristique (voir 0.1.2). Alors, si $\mathbf{2}$ est muni de la distance discrète d_0, on a l'équivalence : 1_A est continue $\Longleftrightarrow$ A est un ouvert fermé.

Si $f : E \longrightarrow E'$ est continue, et si A et B sont des parties de E et E' respectivement, on a les inclusions $\overline{\overset{-1}{f}(A)} \subset \overset{-1}{f}(\overline{A})$, et $\overset{-1}{f}(\overset{\circ}{B}) \subset \big(\overset{-1}{f}(B)\big)^{\circ}$; ces inclusions ne sont pas, en général, des égalités (voir dans 4.2.13 le cas où f est un homéomorphisme).

4.2.7 Remarques : La condition 4.2.5 (ii) est équivalente à dire que l'image réciproque de toute boule ouverte de E' est un ouvert de E, puisque les boules ouvertes de F engendrent la topologie de F (voir 3.2.16) et les images réciproques commutent aux réunions. La proposition 4.2.5 est très utile pour reconnaître que certaines parties sont ouvertes ou fermées (voir les exemples de 4.2.8), mais n'est d'aucune utilité pour reconnaître celles qui ne sont pas ouvertes ou pas fermées !

4.2.8 Exemples (*en exercices*) : Retrouver à l'aide de 4.2.5 que les boules ouvertes et fermées sont respectivement des ouverts et des fermés.

Retrouver, à l'aide de 4.2.5, l'équivalence : $d \overset{Top}{\sim} d' \Longleftrightarrow \mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$, de 3.4.1.

Séparation de deux fermés disjoints par deux ouverts disjoints dans un espace métrique (généralisation du fait que tout espace métrique est séparé ... voir 3.2.11).

Montrer à l'aide de 4.2.5 que, pour les distances usuelles, $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ (déjà vu dans 3.1.16), $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin x\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists n \in \mathbb{N}\ x^2+y^2 = n\}$ et $C = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1\}$ sont des fermés ; que $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$ et $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1$ et $y \geq 0\}$ sont des ouverts. Par contre, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy > 1$ et $z = 0\}$ n'est ni ouvert ni fermé.

Dans $M_n(\mathbb{R})$ muni des distances usuelles d_p (voir 1.3.6), *i.e.* de la topologie usuelle (voir 3.4.6), l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert dense.

Toujours à l'aide de 4.2.5, retrouver le fait que $\{f \in E \mid f(0) > 0\}$ est un ouvert de $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\| \|_\infty$, *i.e.* de la topologie de la convergence uniforme (voir 3.2.11 et 3.2.17).

Soit E un e.v.n. et $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire; alors u est continue ssi $Ker\, u$ est fermé (voir 0.3.4 et 3.1.16).

Soit H un espace préhilbertien et A un partie de H ; alors son orthogonal $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H (voir 1.4.6 et 1.4.7).

4.2.9 Définitions : On dit que l'application $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ est :

- *ouverte* si, pour tout ouvert U de E, $f(U)$ est un ouvert de E',
- *fermée* si, pour tout fermé F de E, $f(F)$ est un fermé de E'.

4.2.10 Proposition : Supposons que l'application $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ est bijective; alors elle est ouverte ssi elle est fermée ssi son inverse est continue.

Preuve : Comme f est bijective, pour tout $A \subset E$, on peut écrire : $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A) = (\overset{-1}{f^{-1}})(A)$, d'où le résultat cherché (voir 0.1.7 pour les notations f^{-1} et $\overset{-1}{f}$). □

4.2.11 Corollaire : L'application $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ est un homéomorphisme ssi elle est bijective, continue et ouverte (resp. et fermée).

Preuve : Résulte immédiatement de 4.2.10 : une bijection continue est ouverte (resp. fermée) ssi son inverse est continue, ssi c'est un homéomorphisme. □

4.2.12 Remarque : On a déjà remarqué qu'une bijection continue n'est pas forcément un homéomorphisme (considérer l'application $id : (\mathbb{R}, d_0) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u))$; elle n'est donc pas forcément ouverte ou fermée. C'est cependant vrai pour une bijection continue $(\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$, voir 2.3.8 et 4.2.13.

4.2.13 Exemples (*en exercices*) : $\mathbb{R}$ étant muni de sa distance usuelle, les fonctions $f,g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x) = 0$ et $g(x) = x^2$ sont continues, fermées et non ouvertes; et Arctg est une application continue, ouverte et non fermée. Toute bijection croissante $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un homéomorphisme; toute bijection continue $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un homéomorphisme.

Les inclusions $\overline{\overset{-1}{f}(B)} \subset \overset{-1}{f}(\overline{B})$, et $\overset{-1}{f}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{\big(\overset{-1}{f}(B)\big)}$, vraies dès que f est continue (voir 4.2.6), deviennent des égalités lorsque f est un homéomorphisme; dans ce cas, il faut aussi rajouter les égalités : $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ et $f(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{\big(f(A)\big)}$.

3. TOPOLOGIE INDUITE

Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. On rappelle que l'on peut munir A de la distance induite d_A (définie par $d_A(x,y) = d(x,y)$ pour tout $x,y \in A$), ce qui fait de A un sous-espace de (E,d) : voir 1.1.6 et 1.1.7. Par définition de d_A, l'injection canonique $j_A : (A, d_A) \longrightarrow (E,d)$ est une isométrie (voir 1.6.4) et, pour toute suite (x_n) dans A et tout $x \in A$, on a l'équivalence : $x_n \xrightarrow{d_A} x \iff x_n \xrightarrow{d} x$ (voir 2.1.11).

4.3.1 Proposition : Soit (E,d) et (E',d') deux espaces métriques, $f : E \longrightarrow E'$ une application et $A \subset E$, $A' \subset E'$ tels que $f(A) \subset A'$. Si f est continue, alors la restriction de f à $A \longrightarrow A'$ est continue (si l'on munit A et A' des distances induites).

Preuve : Notons $g : A \longrightarrow A'$ cette restriction (on a donc $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$). Soit (x_n) une suite dans A et $x \in A$ tels que $x_n \xrightarrow{d_A} x$; on a donc $x_n \xrightarrow{d} x$, de sorte que $f(x_n) \xrightarrow{d'} f(x)$ (car f est continue), *i.e.* $g(x_n) \xrightarrow{d'_{A'}} g(x)$ (car la suite $(f(x_n))$ et le point $f(x)$ sont dans A'). □

4.3.2 Corollaire : Soit $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ un homéomorphisme et $A \subset E$; alors la restriction de f à $A \longrightarrow f(A)$ est encore un homéomorphisme (pour les distances induites).

Preuve : On applique 4.3.1 à f et f^{-1}, sachant que la restriction de f^{-1} à $f(A) \longrightarrow A$ est l'inverse de la restriction de f à $A \longrightarrow f(A)$. □

4.3.3 Exemples (*en exercices*) : La géométrie du caoutchouc (I).

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont munis ici de leur topologie usuelle (voir 3.2.17 et 3.4.6).

Tous les intervalles ouverts (resp. fermés) de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes entre eux ; plus généralement, dans un e.v.n., les boules ouvertes (resp. fermées) sont homéomorphes entre elles (il en est de même de toutes les sphères). De plus, les boules ouvertes sont homéomorphes à l'e.v.n..

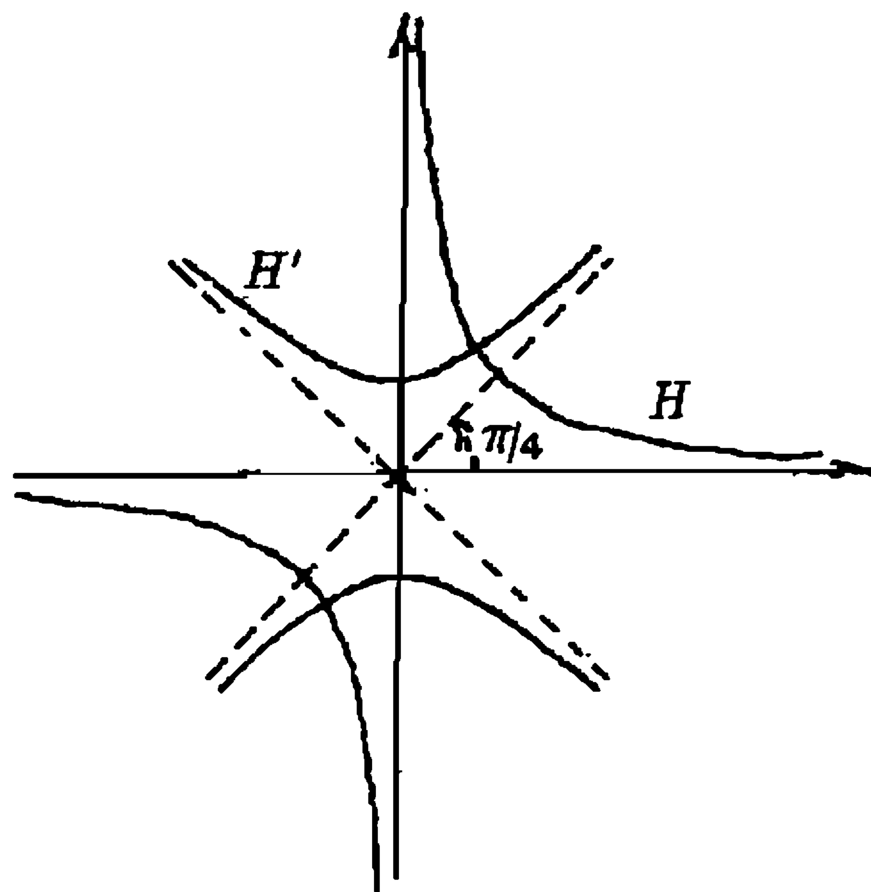


Figure 7 (4.3.3)

Dans $\mathbb{R}^2$, on a $H \simeq H'$, où $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ et $H' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\}$ (figure 7).

Dans $\mathbb{R}^2$, on a $\mathbb{S}^1_\infty \simeq \mathbb{S}^1_1 \simeq \mathbb{S}^1_2 \simeq El$ (où $\mathbb{S}^1_\infty$, $\mathbb{S}^1_1$ et $\mathbb{S}^1_2$ sont respectivement les sphères unités, centrées en l'origine, pour chacune des normes $\| \|_\infty$, $\| \|_1$ et $\| \|_2$; et $El = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2/4) + y^2 = 1\}$) : car on a $\mathbb{S}^1_N \simeq \mathbb{S}^1_{N'}$, lorsque N et N' sont deux normes équivalentes sur un même espace vectoriel.

Dans $\mathbb{R}^2$, on a $\mathbb{S}^1_2 - \{W\} \simeq]-\pi,\pi[\simeq \mathbb{R}$ où $W = (-1,0)$.

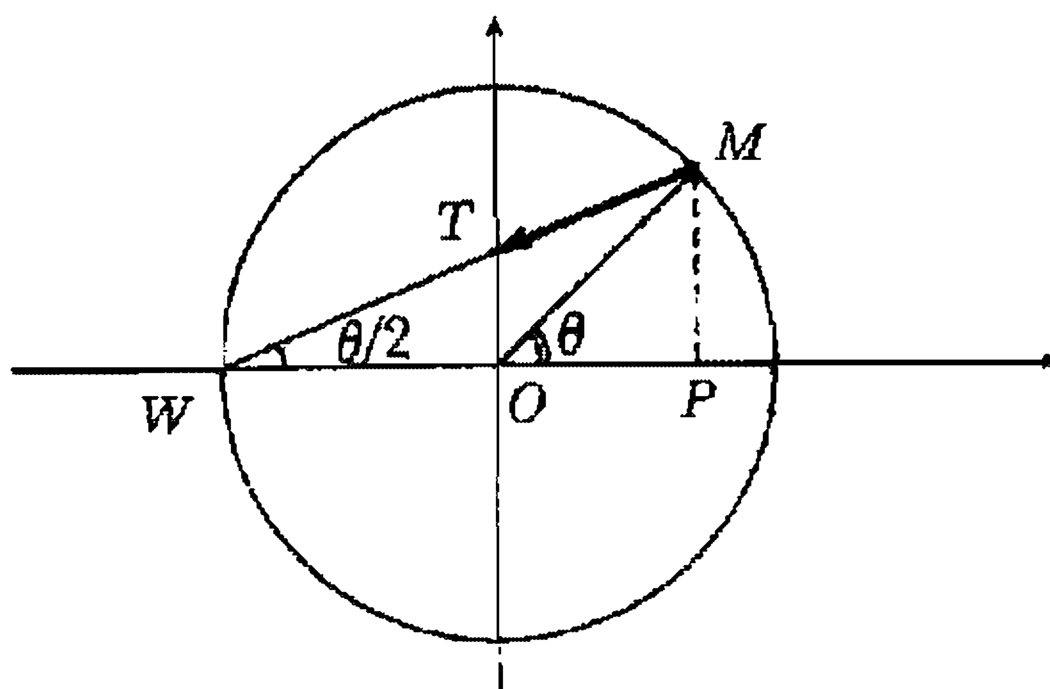


Figure 8 (4.3.4)

4.3.4 Remarques (en exercice) : Commence à "se dessiner" le fait que deux courbes sont homéomorphes si l'on peut passer de l'une à l'autre par une déformation "élastique" (ou étirement continu), sans déchirure (*i.e.* sans discontinuité) : voir, par exemple, la figure 1 de 1.2.3, où les bords des d_p-boules de $\mathbb{R}^2$ sont les sphères $\mathbf{S}^1_p$; on peut en dire autant pour des surfaces homéomorphes (voir la figure 10 de 4.4.6). D'où les titres de 4.3.3 et de 4.4.6, qui font aussi référence à l'ouvrage [1] de la bibliographie (dans lequel on illustre vraiment cet aspect "géométrie élastique" de la topologie).

L'homéomorphisme $\Phi : \mathbf{S}^1_2 - \{W\} \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto y/(1+x)$, construit dans les solutions de 4.3.3, s'appelle la projection stéréographique en dimension 1, de pôle W, sur $\mathbb{R}$ (en fait, sur la figure 8, on projette M en T, sur l'axe des y, *i.e.* sur $\{0\} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ ... voir 4.4.5 et aussi [1] 2.1.6).

En fait, quel que soit $X \in \mathbf{S}^1_2$, on a $\mathbf{S}^1_2 - \{X\} \simeq \mathbf{S}^1_2 - \{W\} \simeq \mathbb{R}$.

On verra dans 5.1.19 que, par contre, $\mathbf{S}^1_2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$ (alors que ces espaces sont équipotents : voir 0.2.5).

L'homéomorphisme proposé dans les solutions de 4.3.3 pour $H \simeq H'$ est la restriction d'un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$; par contre, la projection stéréographique $\Phi : \mathbf{S}^1_2 - \{W\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ne peut être la restriction d'un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, puisque l'on verra dans la section IX.3 que $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$ (pour les topologies usuelles, bien sûr).

4.3.5 Proposition : Soit (E,d) un espace métrique et A une partie de E ; la topologie $\mathcal{T}_{d_A}$ sur A, associée à la distance d_A induite sur A (voir 1.1.6 et 3.2.16), est formée des traces $A \cap U$ sur A d'ouverts U de (E,d).

Preuve : Posons $\mathcal{T}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}_d\}$ et montrons que $\mathcal{T}_{d_A} = \mathcal{T}_A$.

L'injection canonique $j_A : (A,d_A) \longrightarrow (E,d)$ étant une isométrie, elle est continue, si bien que, d'après 4.2.5, $\overset{-1}{j_A}(U)$ est un ouvert de (A,d_A) (*i.e.* $\overset{-1}{j_A}(U) \in \mathcal{T}_{d_A}$) pour tout ouvert U de (E,d) (*i.e.* tel que $U \in \mathcal{T}_d$). Comme $\overset{-1}{j_A}(U) = A \cap U$ (voir 0.1.7), on en déduit l'inclusion $\mathcal{T}_A \subset \mathcal{T}_{d_A}$.

Pour l'inclusion inverse, remarquons d'abord que toute d_A-boule ouverte de (A,d_A) est dans $\mathcal{T}_A$: si $B_E(x,r)$ et $B_A(a,r)$ désignent des boules ouvertes dans (E,d) et (A,d_A) respectivement (on a donc $x \in E$ pour la première et $a \in A$ pour la seconde), on a $B_A(a,r) = \{y \in A \mid d_A(y,a) < r\} = A \cap \{y \in E \mid d(y,a) < r\}$, de sorte que $B_A(a,r) = A \cap B_E(a,r) \in \mathcal{T}_A$ (car $B_E(a,r) \in \mathcal{T}_d$). Comme la topologie

$\mathcal{T}_{d_A}$ est engendrée par l'ensemble des boules ouvertes $B_A(a,r)$ lorsque $a \in A$ et $r > 0$ (voir 3.2.16), on obtiendra bien l'inclusion cherchée $\mathcal{T}_{d_A} \subset \mathcal{T}_A$, après s'être toutefois assuré que l'ensemble $\mathcal{T}_A$ est stable par réunions (en fait, $\mathcal{T}_A$ vérifie tous les axiomes d'une topologie (voir 3.2.12), puisqu'on prouve ici que $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_{d_A}$) : c'est immédiat en utilisant l'égalité (voir 0.1.2) : $\bigcup_i (A \cap U_i) = A \cap (\bigcup_i U_i)$. □

4.3.6 Définition : La topologie $\mathcal{T}_{d_A}$ sur A, associée à la distance induite d_A, s'appelle la ***topologie induite*** sur A par $\mathcal{T}_d$ (cette topologie induite ne dépendant, d'après 4.3.5, que de A et de la topologie $\mathcal{T}_d$ sur E, elle ne change donc pas si on remplace d par une distance qui lui est topologiquement équivalente (voir 3.4.1)) ; se référant à 3.2.16 et à 4.3.5, cette topologie est engendrée par les boules ouvertes $B_A(a,r) = \{x \in A \mid d(x,a) < r\}$ (où $a \in A$ et $r > 0$), *i.e.* par les traces sur A des boules ouvertes de (E,d).

On dit aussi que $(A, \mathcal{T}_{d'})$ est un ***sous-espace topologique*** de $(E, \mathcal{T}_d)$ si A est une partie de E et $d' = d_A$, *i.e.* si (A, d') est un sous-espace de (E,d) (voir 1.1.7) ; plus précisément, l'expression "A est un sous-espace de E" signifiera que E est un espace métrique et que l'on munit A de la distance induite (et donc de la topologie induite). En fait, quand on parlera d'un ouvert (resp. d'un fermé) de A, cela signifiera que A est considéré comme un sous-espace de E. Les ouverts (resp. les voisinages d'un point x de A) dans A sont donc les traces sur A des ouverts (resp. des voisinages de x) dans E.

Enfin, pour toute partie A de $\mathbb{R}$, la topologie induite sur A par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ (voir 3.2.17) est celle qui est associée à la distance usuelle induite sur A ; on l'appelle encore la ***topologie usuelle de A***. Même remarque pour une partie A de $\mathbb{R}^n$ (en remplaçant la distance usuelle de $\mathbb{R}$ par l'une des distances usuelles d_p sur $\mathbb{R}^n$, qui toutes donnent la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$: voir 3.4.6).

4.3.7 Proposition : Les fermés de A sont les traces sur A des fermés de E.

Preuve : Soit $B \subset A$; on a les équivalences : B est un fermé de A ssi $A-B$ est un ouvert de A ssi il existe un ouvert U de E tel que $A-B = A \cap U$ ssi il existe un fermé $E-U$ de E tel que $B = A \cap (E-U)$. □

4.3.8 Exemples (*en exercices*) : Donner la topologie induite sur $\mathbb{Z}$ par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ (donner un ouvert de $\mathbb{Z}$ qui ne soit pas un ouvert de $\mathbb{R}$).

La topologie induite sur $\mathbb{Q}$ par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est-elle la topologie discrète ?

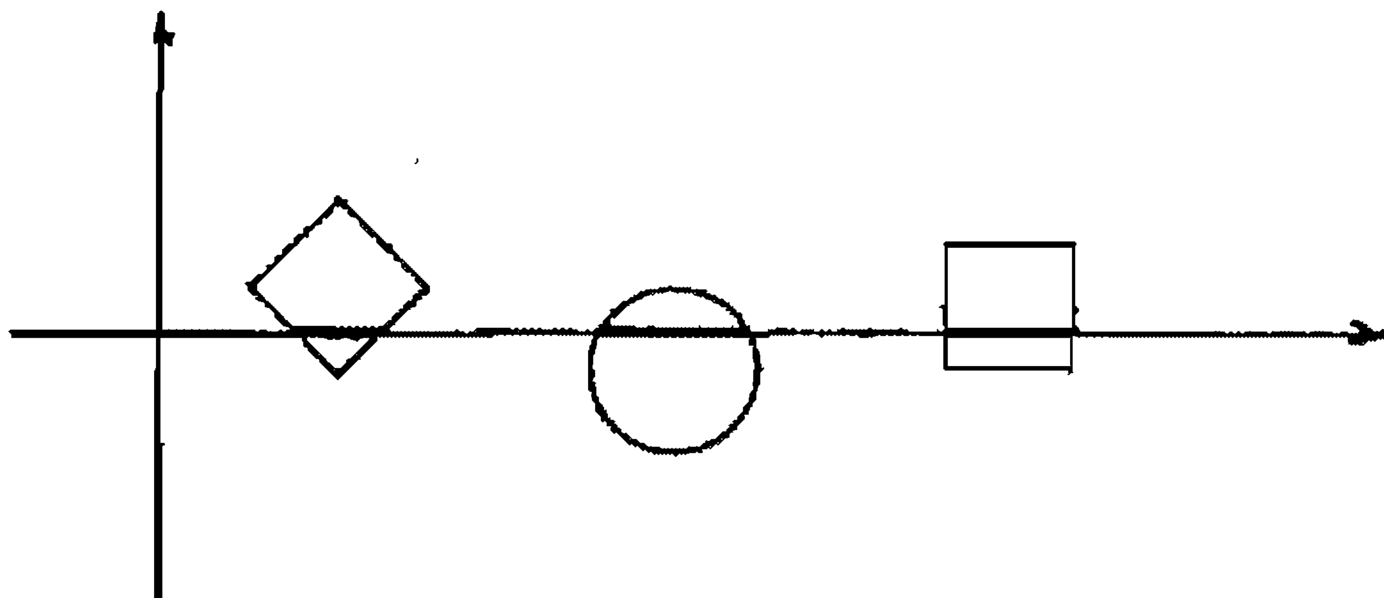


Figure 9 (4.3.8)

Donner la forme des boules ouvertes des sous-espaces $[0,1]$ et $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$, du sous-espace $\mathbb{R} \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^2$ (figure 9).

L'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1 \text{ et } x > 0\}$ est une partie ouverte et fermée du sous-espace $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ de $\mathbb{R}^2$.

4.3.9 Proposition : Si A est un ouvert de E (*i.e.* $A \in \mathcal{T}_d$), alors tout ouvert de A est un ouvert de E (*i.e.* $\mathcal{T}_{d_A} \subset \mathcal{T}_d$). Si B est un ouvert de E qui est inclus dans A, alors B est un ouvert de A $\big($*i.e.* $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{d_A}\big)$.

Preuve : Si A est un ouvert de E, alors tout ouvert de A s'écrivant $A \cap U$, où U est un ouvert de E, est un ouvert de E (comme intersection de deux ouverts de E). Si B est un ouvert de E vérifiant $B \subset A$, on a $B = A \cap B$, de sorte que B est aussi un ouvert de A. □

4.3.10 Remarque : Les énoncés de la 4.3.9 sont encore vrais si l'on remplace partout "ouvert" par "fermé".

4.3.11 Proposition : Soit B une partie de A. Alors l'adhérence de B dans le sous-espace A est la trace sur A de l'adhérence de B dans E.

Preuve : Notons B' l'adhérence de B dans A. C'est donc un fermé de A, de sorte qu'il existe un fermé F de E tel que $B' = A \cap F$. On a donc $B \subset B' \subset F$, de sorte que $\overline{B} \subset F$; par suite, $A \cap \overline{B} \subset A \cap F = B'$.

Pour l'inclusion inverse, on utilise 4.3.7 : on sait que $A \cap \overline{B}$ est un fermé de A ; comme il contient B, on a l'inclusion $B' \subset A \cap \overline{B}$. □

4.3.12 Remarques (*en exercices*) : L'adhérence B' de B dans A est donc égale à l'adhérence $\overline{B}$ de B dans E, lorsque $\overline{B} \subset A$. L'énoncé de 4.3.11 est faux si l'on remplace "adhérence" par "intérieur" ; donner un contre-exemple $\big($d'après 4.3.9, $\overset{\circ}{B}$ étant un ouvert de E inclus dans A (car inclus dans B), il est inclus dans l'intérieur $\overset{\bullet}{B}$ de B dans A ; dans le cas où A est un ouvert de E, $\overset{\bullet}{B}$ est un ouvert de E, on a alors l'égalité $\overset{\circ}{B} = \overset{\bullet}{B}\big)$.

4.3.13 Exemples (*en exercices*) : $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ induit la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ (puisque, sur $\mathbb{R}$, $\overline{d}$ est topologiquement équivalente à d_u : voir 2.2.9) ; de plus, comme pour $\overline{d}$, $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ (voir 3.2.17), tout ouvert (usuel) de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$, et les intérieurs, dans $\mathbb{R}$ et dans $\overline{\mathbb{R}}$ (voir 3.2.17 et 4.3.12), de toute partie de $\mathbb{R}$, coïncident (ce que l'on avait déjà remarqué pour les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ dans 0.2.5).

La boule $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ est un ouvert fermé du sous-espace $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Propriétés topologiques de la partie $I =]0,+\infty[\times \{0\}$ dans les sous-espaces $A_1 =]0,+\infty[\times \mathbb{R}$ et $A_2 = \mathbb{R} \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^2$?

Dans le sous-espace $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2-1)(x^2+y^2) = 0\}$, donner les boules unités ouverte et fermée, centrées en l'origine, $B_C((0,0),1)$ et $B'_C((0,0),1)$, ainsi que la fermeture de la première et l'intérieure de la seconde dans C.

4.3.14 Proposition : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application (où E et F sont des espaces métriques) et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E (*i.e.* les U_i sont des ouverts de E qui recouvrent E : voir 0.1.2). Notons f_i la restriction de f à

$U_i \longrightarrow F$. Alors, l'application f est continue ssi les restrictions f_i sont continues (pour la topologie induite sur U_i) pour tout $i \in I$. Le résultat ci-dessus est encore vrai dans le cas où $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement fermé fini (*i.e.* I est fini) de E (*i.e.* les U_i sont des fermés en nombre fini qui recouvrent E).

Preuve : La continuité de f implique celle de ses restrictions f_i (d'après 4.3.1). Inversement, supposons tous les f_i continus et soit V un ouvert de F. Alors chaque $\overset{-1}{f_i}(V)$ est un ouvert du sous-espace U_i, et donc de E (puisque U_i est un ouvert de E). On en conclut donc que $\overset{-1}{f}(V) = \bigcup_i \overset{-1}{f_i}(V)$ est aussi un ouvert de E, d'où la continuité de f. Lorsque les U_i forment un recouvrement fermé fini, la preuve que f est continue est identique (en remplaçant partout ouvert par fermé ; l'hypothèse que I est fini étant là pour que $\bigcup_i \overset{-1}{f_i}(V)$ soit un fermé de E, lorsque V est un fermé de F). □

4.3.15 Corollaire : Soit E et F deux espaces métriques, $(U_i)_{i\in I}$ une partition ouverte de E (*i.e.* les U_i sont des ouverts de E qui forment une partion de E ...voir 0.1.2), $(V_i)_{i\in I}$ une partition ouverte de F ; si l'on a $U_i \simeq V_i$ pour tout $i \in I$, on a alors aussi $E \simeq F$ (on peut remplacer partout "partition ouverte" par "partition fermée finie").

Preuve : *A priori*, on dispose d'une famille d'homéomorphismes $(f_i)_{i\in I}$, avec $f_i : U_i \longrightarrow V_i$ pour tout $i \in I$. En fait, on peut "recoller" les bijections f_i pour définir une bijection $f : E \longrightarrow F$, on posant $f(x) = f_i(x)$, où i est l'unique élément de I tel que $x \in U_i$. Il reste alors à appliquer 4.3.14 à f et f^{-1}. □

4.3.16 Remarque : L'énoncé de 4.3.14 est faux dans le cas d'un recouvrement fermé non fini (sinon, toute application serait continue, en écrivant $E = \bigcup_{x\in E}\{x\}$).

4.3.17 Exemples (*en exercices*) : Pour la distance usuelle, l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = 0$ ou $\sin x$ selon que $x \leq 0$ ou non, est continue, alors que l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 0$ ou 1, selon que $x \leq 0$ ou non, ne l'est pas (expliquer pourquoi on ne peut appliquer 4.3.14 à l'application g) ; de même, la fonction caractéristique $1_{\mathbb{Q}}$ (voir 0.1.2) n'est pas continue, alors que ses restrictions à $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^c$ le sont.

Utiliser 4.3.14 pour prouver que les applications $(x, y) \mapsto \sup(x, y)$ et $(x, y) \mapsto \inf(x, y)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

4. TOPOLOGIE PRODUIT

Soit (E, d) et (E', d') deux espaces métriques. On rappelle que l'on peut définir, sur l'ensemble produit $E \times E'$, des distances produit d_p (avec $p = 1, 2, \infty$), métriquement équivalentes (voir 1.1.9 et 1.5.5), qui définissent donc la même topologie, notée $\widehat{\mathcal{T}}$, sur $E \times E'$, d'après 3.4.4 (cette topologie $\widehat{\mathcal{T}}$ ne dépendant, d'après 4.4.8, que de $\mathcal{T}_d$ et $\mathcal{T}_{d'}$, on peut donc remplacer, sans changer $\widehat{\mathcal{T}}$, d et d' par deux distances qui leur sont respectivement topologiquement équivalentes (voir 3.4.1)). On a vu dans 1.6.5 et 2.1.13 que les projections canoniques $\pi : (E \times E', d_p) \longrightarrow (E, d)$ et $\pi' : (E \times E', d_p) \longrightarrow (E', d')$ sont continues et que, si (x_n, x'_n) est une suite de points de $E \times E'$ et si $(x, x') \in E \times E'$, on a

l'équivalence : $(x_n, x'_n) \xrightarrow{d_p} (x, x') \iff x_n \xrightarrow{d} x$ et $x'_n \xrightarrow{d'} x'$. Se reporter à 2.3.9 et 2.3.12 pour la continuité des applications dont la source ou le but est un espace métrique produit (voir 1.5.6).

4.4.1 Définition : La topologie $\widehat{\mathcal{T}}$ sur $E \times E'$, associée aux distances d_p, est appelée la *topologie produit* (des topologies $\mathcal{T}_d$ et $\mathcal{T}_{d'}$). Par exemple, la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$ est une topologie produit (où $E = E' = \mathbb{R}$ et $d = d' = d_u$).

On dit que $(E \times E', \widehat{\mathcal{T}})$ est un *espace produit*; plus simplement, l'expression "$E \times E'$ est un espace produit" signifiera que E et E' sont des espaces métriques et que l'on munit $E \times E'$ de la topologie produit (*i.e.* de l'une des distances produit). En fait, tout produit d'espaces métriques sera considéré ici comme un espace produit.

4.4.2 Proposition : Soit E et F deux espaces métriques ; alors $E \times F \simeq F \times E$.

Preuve : Il suffit d'utiliser la bijection $E \times F \longrightarrow F \times E : (x, y) \mapsto (y, x)$ (elle est égale à son inverse) qui est continue puisque ses composantes le sont (ce sont les projections). □

4.4.3 Proposition : Soit E, E', F, F' des espaces métriques et $f : E \longrightarrow E'$, $g : F \longrightarrow F'$ deux applications ; considérons alors $f \times g : E \times F \longrightarrow E' \times F'$, l'application définie par $f(x, y) = \big(f(x), g(y)\big)$. Si f et g sont continues, alors $f \times g$ l'est aussi (pour les topologies produits, bien sûr). En particulier, on a l'implication : $E \simeq E'$ et $F \simeq F' \Longrightarrow E \times F \simeq E' \times F'$.

Preuve : Il suffit de remarquer que les composantes de l'application $f \times g$ sont les applications continues $f \circ \pi_1 : E \times F \longrightarrow E'$ et $g \circ \pi_2 : E \times F \longrightarrow F'$. Bien sûr, si f et g sont des homéomorphismes, $f \times g$ en est aussi un (l'inverse de $f \times g$ étant $f^{-1} \times g^{-1}$) ; d'où l'implication proposée. □

4.4.4 Proposition : Soit E et F deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une application continue. Soit $Gr(f) = \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$ le graphe de f, considéré comme sous-espace de l'espace produit $E \times F$. Alors $Gr(f) \simeq E$.

Preuve : Soit p la restriction de la première projection $\pi_1 : E \times F \longrightarrow E$ à $Gr(f)$; alors p est bijective (son inverse étant $p^{-1}(x) = \big(x, f(x)\big)\big)$. C'est même un homéomorphisme, puisque p et p^{-1} sont continues (la première est la restriction d'une projection, et les composantes de la seconde sont continues). On a donc prouvé que $Gr(f)$ et E sont homéomorphes. □

4.4.5 Corollaire : Soit E et F deux espaces métriques non vides ; fixons deux points $x_0 \in E$ et $y_0 \in F$. On a les homéomorphismes : $E \simeq E \times \{y_0\}$ et $F \simeq \{x_0\} \times F$.

Preuve : C'est une application immédiate de 4.4.4 : en effet, $E \times \{y_0\}$ est le graphe de l'application constante $E \longrightarrow F : x \mapsto y_0$ qui est évidemment continue, d'où l'homéomorphisme $E \times \{y_0\} \simeq E$; quant au deuxième homéomorphisme, il suffit d'écrire $\{x_0\} \times F \simeq F \times \{x_0\} \simeq F$ (voir 4.4.2). □

4.4.6 Exemples (*en exercices*) : La géométrie du caoutchouc (II) (voir 4.3.3 et 4.3.4). Retrouver (voir 3.1.16) que le graphe d'une application continue $f : E \longrightarrow F$ (où E et F sont des espaces métriques) est un fermé de $E \times F$, en l'écrivant comme une image réciproque d'un fermé de $F \times F$. Attention, ici F n'est pas supposé être un espace vectoriel, on ne peut donc pas écrire que $Gr(f) = \{(x, y) \in E \times F \mid$

$y - f(x) = 0\}$, comme dans le cas des fonctions à valeur dans $\mathbb{R}$ (voir 4.2.8).

Les droites horizontales $\mathbb{R} \times \{x\}$ et les droites verticales $\{x\} \times \mathbb{R}$ sont homéomorphes à $\mathbb{R}$ (où $x \in \mathbb{R}$).

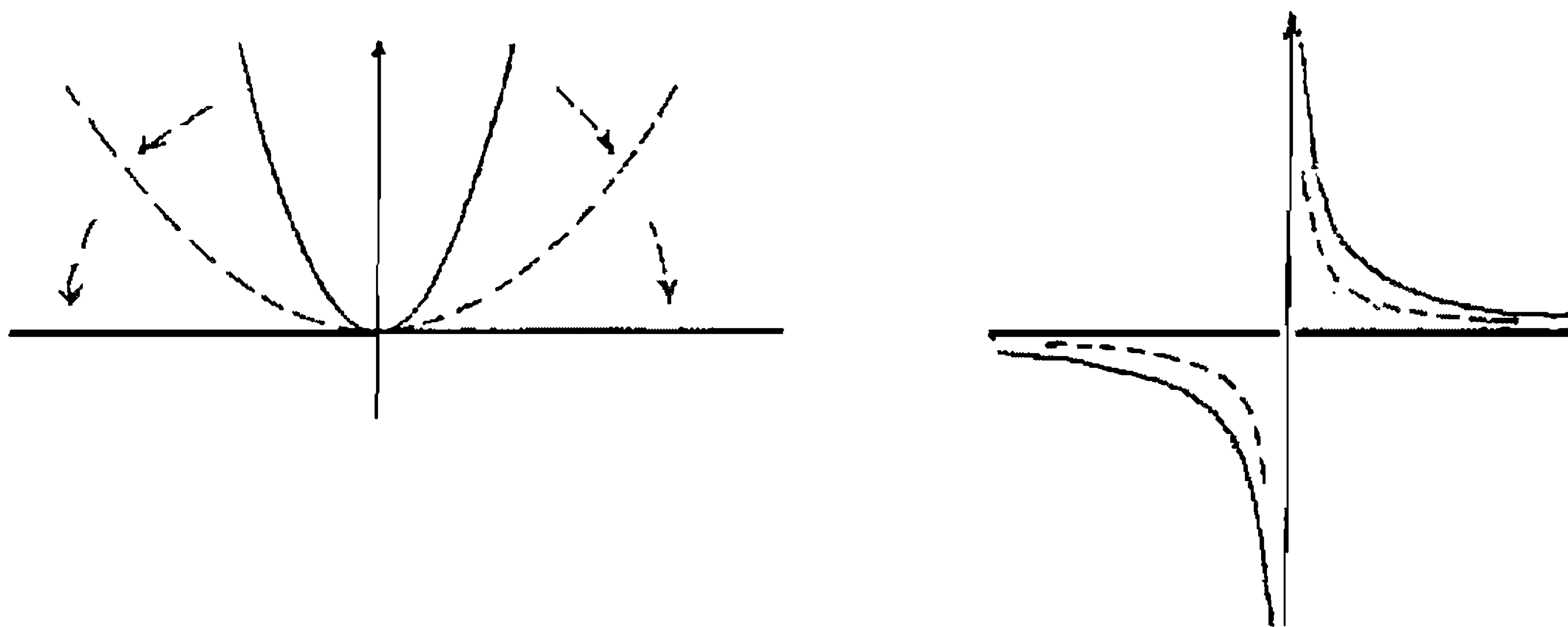


Figure 10 (4.4.6)

Une parabole et une hyperbole sont respectivement homéomorphes à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ (figure 10). Ces homéomorphismes ne peuvent être la restriction d'homéomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (on montrera, par un argument de connexité, que $\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}^2$: voir 9.3.21).

Pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on pose $f_\geq = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x)\}$, $f_> = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > f(x)\}$, $f_\leq = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq f(x)\}$ et $f_< = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < f(x)\}$. Si f est continue (pour la distance usuelle), on a $f_\geq \simeq f_\leq \simeq \mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et $f_> \simeq f_< \simeq \mathbb{R}^2$.

Si $P_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$ et $P_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2\}$, on a $P_+ \simeq P_- \simeq \mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

On a $Cyl \simeq \mathbb{S}^1_2 \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{S}^1_1 \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{S}^1_\infty \times \mathbb{R} \simeq El \times \mathbb{R} \simeq El \times]0,1[$, $\mathbb{S}^1_2 \times \mathbb{S}^1_2 \simeq \mathbf{T}$ (où Cyl et $\mathbf{T}$ sont le cylindre et le tore dont les équations ont été données dans 1.5.11, avec ici $r = 1$ pour Cyl et $0 < r < R$ pour $\mathbf{T}$; et El est l'ellipse d'équation $(x^2/4) + y^2 = 1$).

4.4.7 Remarques : Le fait que le graphe $Gr(f)$ de f soit fermé n'implique pas que f soit continue. On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$ ou 0, selon que $x \neq 0$ ou non. Son graphe est fermé dans $\mathbb{R}^2$ (c'est l'union du fermé $\{(0,0)\}$ et du fermé $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$), et pourtant f n'est pas continue. En fait, il suffit que le but de f soit métrique compact pour que l'on ait : $Gr(f)$ fermé $\Longrightarrow f$ continue (voir 5.2.8).

Tous les cylindres, qu'ils soient de "base" un cercle ($\mathbb{S}^1_2$), un carré ($\mathbb{S}^1_1$ ou $\mathbb{S}^1_\infty$) ou une ellipse (El) sont homéomorphes entre eux.

De même qu'un cylindre est engendré par la rotation d'une droite verticale autour d'un cercle (d'un carré ou d'une ellipse) horizontal ($Cyl \simeq \mathbb{S}^1_2 \times \mathbb{R} \ldots$etc), un tore est engendré par la rotation d'un cercle vertical autour d'un cercle horizontal ($\mathbf{T} \simeq \mathbb{S}^1_2 \times \mathbb{S}^1_2$) : voir la figure 5 de 1.4.10.

4.4.8 Proposition : La topologie produit $\widehat{\mathcal{T}}$ sur $E \times E'$ (associée aux distances produit d_p, E étant muni de la distance d, et E' de la distance d') est engendrée

(voir 3.2.16) par les ouverts $U \times U'$, où U est un ouvert de $(E, \mathcal{T}_d)$ et U' un ouvert de $(E', \mathcal{T}_{d'})$.

Preuve : Posons $\mathcal{B} = \{U \times U' \mid U \in \mathcal{T}_d \text{ et } U' \in \mathcal{T}_{d'}\}$. Prouvons par exemple l'égalité $\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \mathcal{T}_{d_\infty}$, où $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ désigne la topologie sur $E \times E'$ engendrée par $\mathcal{B}$, *i.e.* dont les éléments sont les réunions d'éléments de $\mathcal{B}$ (voir 3.2.16). Les projections canoniques $\pi : (E \times E', d_\infty) \longrightarrow (E, d)$ et $\pi' : (E \times E', d_\infty) \longrightarrow (E', d')$ étant lipschitziennes, elles sont continues, si bien que $\overset{-1}{\pi}(U) \in \mathcal{T}_{d_\infty}$ et $\overset{-1}{\pi'}(U') \in \mathcal{T}_{d_\infty}$ pour tout $U \in \mathcal{T}_d$ et $U' \in \mathcal{T}_{d'}$ (voir 4.2.5). Comme $\overset{-1}{\pi}(U) = U \times E'$, et $\overset{-1}{\pi'}(U') = E \times U'$ (voir 0.1.7), on en déduit que $U \times U' = (U \times E') \cap (E \times U') \in \mathcal{T}_{d_\infty}$ pour tout $U \in \mathcal{T}_d$ et $U' \in \mathcal{T}_{d'}$ (puisque toute topologie est stable par intersections finies). D'où l'inclusion $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{d_\infty}$, et donc aussi $\mathcal{T}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{T}_{d_\infty}$ (puisque $\mathcal{T}_{d_\infty}$ est stable par réunions quelconques).

Par ailleurs, Il est évident que les d_∞-boules ouvertes sont des éléments de $\mathcal{B}$: si $X = (x, x') \in E \times E'$, on a $B_{d_\infty}(X, r) = \{Y \in E \times E' \mid d_\infty(X, Y) < r\} = \{(y, y') \in E \times E' \mid d(x, y) < r \text{ et } d'(x', y') < r\} = B_d(x, r) \times B_{d'}(x', r) \in \mathcal{B}$. On a donc obtenu l'inclusion $\mathcal{B}_\infty \subset \mathcal{B}$, où $\mathcal{B}_\infty = \{B_{d_\infty}(X, r) \mid X \in E \times E' \text{ et } r > 0\}$.

Comme les d_∞-boules ouvertes engendrent la topologie $\mathcal{T}_{d_\infty}$, on a $\mathcal{T}_{d_\infty} = \mathcal{T}(\mathcal{B}_\infty) \subset \mathcal{T}(\mathcal{B})$; d'où l'égalité $\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \mathcal{T}_{d_\infty}$ annoncée plus haut. Comme par définition de $\widehat{\mathcal{T}}$, on a $\widehat{\mathcal{T}} = \mathcal{T}_{d_\infty}$, on a bien l'égalité $\widehat{\mathcal{T}} = \mathcal{T}(\mathcal{B})$. □

4.4.9 Définition : On appelle *pavé ouvert* de $E \times E'$, les éléments de $\mathcal{B}$, *i.e.* les $U \times U'$, où $U \in \mathcal{T}_d$ et $U' \in \mathcal{T}_{d'}$. La topologie produit $\widehat{\mathcal{T}}$ sur $E \times E'$ est engendrée par les pavés ouverts, d'après 4.4.8. Ceci ne nous surprend pas car, comme on l'a vu dans 4.4.8, les d_∞-boules (qui engendrent la topologie $\mathcal{T}_{d_\infty}$) sont elles-même des pavés ouverts. Les ouverts de $E \times E'$ sont donc les réunions de pavés ouverts.

4.4.10 Proposition : Soit $(x, x') \in E \times E'$. Alors les pavés ouverts contenant (x, x') forment une base de voisinages de (x, x') dans $E \times E'$ (voir 3.3.3).

Preuve : C'est évident, car les boules $B_{d_\infty}((x, x'), r)$ sont des pavés ouverts contenant (x, x') et forment une base de voisinages de (x, x') (voir 3.3.3). □

4.4.11 Proposition : Un produit de sous-espaces est lui-même un sous-espace du produit. En d'autres termes, Si (E, d) et (E', d') sont deux espaces métriques, et si $A \subset E$ et $A' \subset E'$, alors la topologie produit $\widehat{\mathcal{T}}$ sur $E \times E'$ (*i.e.* associée à l'une des distances d_p) induit sur $A \times A' \subset E \times E'$ la topologie produit des topologies $\mathcal{T}_{d_A}$ et $\mathcal{T}_{d'_{A'}}$, induites respectivement sur A et A'.

Preuve : Si on pense aux distances d_p, c'est évident : les distances produit de d et d' sur $E \times E'$ induisant sur $A \times A'$ les distances produit de d_A et $d'_{A'}$ (il suffit de l'écrire : par exemple, pour $p = \infty$, $(x, x'), (y, y') \in A \times A'$, on a $(d_\infty)_{A \times A'}((x, x'), (y, y')) = d_\infty((x, x'), (y, y')) = \sup(d(x, y), d'(x', y')) = \sup(d_A(x, y), d'_{A'}(x', y'))$).

Ou bien, utilisant 4.3.5, 4.4.8 et 4.4.9, on peut voir que la topologie $\widehat{\mathcal{T}}_{A \times A'}$, induite sur $A \times A'$ par $\widehat{\mathcal{T}}$, est engendrée par les $(A \times A') \cap (U \times U')$, où U et U' sont des ouverts de E et E' respectivement ; de même, la topologie produit des topologies $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}'_{A'}$ est engendrée par les $(A \cap U) \times (A' \cap U')$. Il suffit donc d'utiliser l'égalité $(A \times A') \cap (U \times U') = (A \cap U) \times (A' \cap U')$. □

4.4.12 Exemples (*en exercices*) : Les *pavés fermés* (*i.e.* les $F \times F'$, où F et F' sont des fermés de E et E' respectivement) sont des fermés de la topologie produit.

On a les égalités suivantes : $\overline{A \times A'} = \overline{A} \times \overline{A'}$ et $\overset{\circ}{\overline{A \times A'}} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{A'}$.

Pour toute partie A non vide d'un espace métrique, on a l'égalité $\delta(A) = \delta(\overline{A})$ (pour le diamètre, voir 1.1.3).

Pour la topologie produit, les projections sont ouvertes ; l'addition d'un e.v.n. est une application ouverte. Ces applications ne sont pas fermées (on donne des contre-exemples dans $\mathbb{R}^2$) ; voir aussi 5.1.19 pour l'addition, et 5.2.17 pour les projections.

Tout produit fini d'espaces topologiques discrets est encore discret.

Retrouver que la diagonale Δ_E est un fermé de l'espace produit $E \times E$ (voir 3.1.16), en prouvant que son complémentaire Δ_E^c est ouvert.

Si l'on munit $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ de sa topologie discrète, et $\mathbb{R}$ de sa topologie usuelle, comparer la topologie produit sur $\mathbb{R} \times \mathbf{2}$ avec la topologie usuelle (induite) ; $\mathbb{R} \times \{0\}$ et $\mathbb{R} \times \{1\}$ sont-ils des ouverts ? des fermés ? dans $\mathbb{R} \times \mathbf{2}$? dans $\mathbb{R}^2$? De plus, on a $\mathbb{R} \times \mathbf{2} \simeq \mathbb{R}^*$; ainsi que $\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \simeq \mathbb{R} - \mathbb{Z}$!

4.4.13 Remarques : Bien sûr, la notion de pavés ouverts se généralise pour un produit fini d'espaces métriques $E_1 \times \ldots \times E_n$, comme étant un produit d'ouverts $U_1 \times \cdots \times U_n$, où chaque U_i est un ouvert de E_i. Les réunions de pavés ouverts sont encore les ouverts de la topologie produit $\widehat{\mathcal{T}}$ associée aux distances produit d_p sur $E_1 \times \ldots \times E_n$ (voir 1.1.9 et 4.4.8). La topologie produit est associative (à homéomorphisme près), on a en effet les homéomorphismes : $E \times (F \times G) \simeq E \times F \times G \simeq (E \times F) \times G$; et $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \simeq \mathbb{R}^{n+p}$. On a déjà vu dans 4.4.2 et 4.4.5 qu'elle est commutative et possède des éléments unités (toujours à homéomorphisme près).

On peut aussi parler de produit dénombrable d'espaces métriques (E_n, d_n). On a encore une *distance produit* sur l'ensemble $\Pi_n E_n$ (voir 0.1.3) : $\delta(x, y) = \sum_{n_0}^{\infty} d'_n(x_n, y_n)/2^n$, où chaque d'_n est une distance sur E_n, qui est topologiquement équivalente à d_n et qui est bornée par 1 : ça existe, par exemple, $\inf(1, d_n)$ ou $d_n/(1 + d_n)$: voir 2.2.9 (on en a donné un exemple dans 1.1.11 avec $E_n = \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). La topologie sur $\Pi_n E_n$ associée à δ est encore la topologie produit (engendrée par les pavés ouverts qui, ici, sont les produits $\Pi_n U_n$, où chaque U_n est un ouvert de E_n pour d_n, et où seul un nombre fini de ces U_n sont différents de E_n). Et une suite converge dans un tel espace produit ssi elle converge composante par composante (comme pour les produits finis, voir 2.1.13 et 2.1.15).

Par contre, même si l'on peut parler de topologie produit sur un produit $\Pi_i E_i$ quelconque d'espaces métriques (E_i, d_i) (engendrée, comme ci-dessus, par les pavés ouverts), il n'existe pas toujours de distance sur $\Pi_i E_i$ dont la topologie associée soit cette topologie produit (*i.e.* la topologie produit d'un produit infini non dénombrable d'espaces métriques n'est pas toujours métrisable ; voir Epil 3 et [1] 5.2.5).

Chapitre V
LES ESPACES METRIQUES COMPACTS

1. ESPACES METRIQUES COMPACTS (I)

5.1.1 Définition : Soit E un espace métrique. On dit que E est *compact* si toute suite de points de E possède une sous-suite convergente (et il reste compact si l'on remplace sa distance par une distance qui lui est topologiquement équivalente) ; pour les sous-suites, se reporter à 0.2.1. On dit qu'une partie A de E est un compact de E si A est compact pour la distance induite, *i.e.* si c'est un sous-espace compact.

5.1.2 Proposition : Tout espace métrique compact est borné.

Preuve : Soit (E, d) un espace métrique compact. S'il n'était pas borné, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existerait un $(x_n, y_n) \in E \times E$ vérifiant $d(x_n, y_n) \geq n$ (voir 1.1.2). Comme E est compact, la suite (x_n) possède une sous-suite (x_{n_k}) convergente (vers un $x \in E$) ; pour la même raison, la suite (y_{n_k}) possède une sous-suite $(y_{n_{k_l}})$ convergente (vers un $y \in E$). On considère alors les deux sous-suites $(x_{n_{k_l}})$ et $(y_{n_{k_l}})$ de (x_n) et (y_n) respectivement ; elles convergent vers x et y respectivement (d'après 2.1.4), de sorte que la suite $(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}})$ converge vers (x, y) dans $E \times E$ (muni de l'une des distances produit d_p (voir 2.1.13)). Mais alors, en utilisant la continuité des distances (voir 1.6.7 et 2.3.14), on pourrait écrire $d(x, y) = \lim_l d(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}) \geq \lim_l n_{k_l} = +\infty$, et donc $d(x, y) = +\infty$! D'où la contradiction (ceci dit, si l'on disposait dès maintenant du résultat de 5.1.16, on pourrait dire plus simplement que la suite (x_n, y_n) possède elle-même une sous-suite convergente). □

5.1.3 Exemples (*en exercices*) : Pour la topologie usuelle, les espaces $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ne sont pas compacts ; un espace discret infini ne peut être compact ... voir aussi 5.2.23. Un e.v.n. non réduit à $\{0\}$ n'est jamais compact, d'après 1.3.16. Donner une suite bornée dans $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ qui ne possède aucune sous-suite convergente.

5.1.4 Proposition : Dans $\mathbb{R}$, muni de sa distance usuelle, tout intervalle fermé et borné est compact.

Preuve : Soit $[a, b]$ un intervalle fermé et borné et (x_n) une suite de point de $[a, b]$; c'est donc une suite de réels bornée. Utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass (2.1.8), on sait qu'elle possède une sous-suite qui d_u-converge ; sa limite est en fait dans $[a, b]$, puisque $[a, b]$ est fermé. □

5.1.5 Proposition : Dans un espace métrique compact, toute partie fermée est compacte.

Preuve : Soit E un espace métrique compact, A une partie fermée de E et (x_n) une suite de points de A. Comme E est compact, cette suite possède une sous-suite convergente dans E (dans A, en fait, puisque A est fermé). □

5.1.6 Proposition : Toute partie compacte d'un espace métrique est fermée.

<u>Preuve</u> : Soit E un espace métrique et A une partie compacte. Soit aussi (x_n) une suite de points de A qui converge vers $x \in E$; montrons que $x \in A$. Comme A est compact, la suite (x_n) possède une sous-suite convergente vers un $y \in A$; par unicité de la limite de la sous-suite, on obtient $y = x$, si bien que $x \in A$. □

5.1.7 Proposition : Les compacts de $\mathbb{R}$, muni de sa distance usuelle, sont ses parties fermées et bornées ; ils possèdent donc un plus petit et un plus grand élément (lorsqu'ils sont non vides).

<u>Preuve</u> : Soit A une partie compacte de $\mathbb{R}$; elle est fermée et bornée, d'après 5.1.6 et 5.1.2. Inversement, si A est bornée, elle est incluse dans un intervalle $[a, b]$; si elle est aussi fermée dans $\mathbb{R}$, sa compacité résultera de celle de $[a, b]$ (voir 5.1.4 et 5.1.5), puisque, d'après 4.3.10, A est aussi fermé dans $[a, b]$.

De plus, si A est compacte non vide, on a $\inf A, \sup A \in A$, d'après 3.1.18. □

5.1.8 Proposition : Dans un espace métrique, une réunion finie de compacts est compacte, toute intersection non vide de compacts est compacte.

<u>Preuve</u> : Soit E un espace métrique, et A, B deux compacts de E. Soit (x_n) une suite dans $A \cup B$; montrons qu'elle possède une sous-suite convergente dans $A \cup B$. Utilisant la proposition de 0.2.4, on sait que la suite (x_n) possède une sous-suite trace dans A ou dans B. Supposons par exemple qu'elle en possède une dans A. Comme A est supposé compact, cette sous-suite possède elle-même une sous-suite convergente dans A (et donc dans $A \cup B$) ; il reste alors à remarquer que cette dernière sous-suite est aussi une sous-suite de la suite (x_n) (voir 0.2.1).

Soit maintenant $(A_i)_{i \in I}$ une famille de compacts de E (avec I non vide) ; les A_i sont donc des fermés de E (voir 5.1.6). Par suite, $\bigcap_{i \in I} A_i$ est fermé dans E, et donc dans chacun des A_i, d'après 4.3.10 ; ces derniers étant compacts, on en déduit, d'après 5.1.5, que $\bigcap_{i \in I} A_i$ est aussi compact. □

5.1.9 <u>Exemples</u> (*en exercices*) : Toute partie finie d'un espace métrique est compacte ; un espace discret est donc compact ssi il est fini, d'après 5.1.3 (dans un espace discret infini, toute partie infinie est donc un fermé borné non compact) ...voir aussi 5.2.23 ; pour la distance usuelle, $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est un fermé borné de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas compact (puisque non fermé dans $\mathbb{R}$). Toujours pour la distance usuelle, $S = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est pas compact alors que $S' = S \cup \{0\}$ l'est (voir aussi 5.1.15 et 5.2.24, où l'on traite le cas général). Donner une réunion infinie de compacts qui n'est pas compacte.

5.1.10 Proposition : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue, où E est métrique compact et F est métrique. Alors $f(E)$ est compact.

<u>Preuve</u> : Soit (y_n) une suite de points de $f(E)$; montrons qu'elle possède une sous-suite convergente dans $f(E)$. Soit (x_n) une suite dans E telle que l'on ait $y_n = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (une telle suite existe, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $y_n \in f(E)$). L'espace E étant compact, la suite (x_n) possède une sous-suite (x_{n_k}) convergente vers un $x \in E$; l'application f étant continue, la suite $(f(x_{n_k}))$ converge vers $f(x)$. On a ainsi trouvé une sous-suite (y_{n_k}) de la suite (y_n) qui converge dans $f(E)$. □

5.1.11 Corollaire : Si E et F sont deux espaces métriques homéomorphes, alors E est compact ssi F est compact.

Preuve : Si E et F sont homéomorphes, on dispose d'une bijection bicontinue $f : E \longrightarrow F$. On applique donc 5.1.10 à f et f^{-1}. □

5.1.12 Corollaire : Toute application continue d'un métrique compact dans un métrique est fermée.

Preuve : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue, où E est métrique compact et F métrique. Soit A un fermé de E ; c'est un compact d'après 5.1.5. Son image $f(A)$ est donc un compact de F d'après 5.1.10 ; c'est donc *a fortiori* un fermé de F d'après 5.1.6. □

5.1.13 Corollaire : Toute bijection continue d'un métrique compact dans un métrique est un homéomorphisme.

Preuve : On utilise 4.2.11 et 5.1.12. □

5.1.14 Remarque : On avait vu dans 4.2.12 qu'une bijection continue n'est pas toujours un homéomorphisme. L'intérêt du résultat de 5.1.13 est qu'il n'est pas nécessaire de connaître explicitement l'inverse de la bijection continue, lorsqu'elle est définie sur un compact.

5.1.15 Exemples (*en exercices*) : Pour la distance usuelle, les intervalles $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$ ...et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes à l'intervalle $[a, b]$ (alors que tous ces intervalles sont équipotents à $\mathbb{R}$: voir 0.2.5).

$(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ et $(\mathbb{N}', d')$ sont compacts (voir 2.3.15 pour les définitions) ; on en déduit que si, dans un espace métrique (E, d), $x_n \longrightarrow x$, alors $S' = S \cup \{x\}$ (avec $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$) est compact (voir aussi 5.1.9 et 5.2.24).

L'espace $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\theta \in \mathbb{R} \quad x = \cos 2\theta \text{ et } y = \sin 3\theta\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ (pour la topologie usuelle).

5.1.16 Théorème : Tout produit fini d'espaces métriques compacts est métrique compact (la réciproque est vraie dans le cas d'espaces non vides).

Preuve : Soit E et F deux espaces métriques compacts ; prouvons que $E \times F$, muni de l'une des distances produit d_p de 1.1.9 est aussi compact. Soit (x_n, y_n) une suite de points de $E \times F$; montrons qu'elle possède une sous-suite convergente. La suite (x_n) possède une sous-suite convergente (vers un $x \in E$), puique tous ses termes sont dans E qui est compact. La suite correspondante (y_{n_k}) ayant tous ses termes dans le compact F possède elle aussi une sous-suite $(y_{n_{k_l}})$ convergente dans F (vers un $y \in F$). On dispose donc de la suite $(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}})$ dans $E \times F$ qui est une sous-suite de la suite donnée (x_n, y_n), et qui converge vers (x, y) (pour les distances d_p, *i.e.* composante par composante). Inversement, si E et F sont non vides, alors $E = \pi_1(E \times F)$ et $F = \pi_2(E \times F)$. Les projections canoniques étant continues (voir 1.6.5), la compacité de E et F résulte de celle de $E \times F$, d'après 5.1.10. Le produit étant associatif (voir 4.4.13), c'est encore vrai pour un produit fini quelconque de compacts. □

5.1.17 Corollaire : Les compacts de $\mathbb{R}^n$, muni de l'une de ses distances usuelles d_p, sont ses parties fermées et bornées.

Preuve : Par 5.1.2 et 5.1.6, on sait que tout compact de $\mathbb{R}^n$ est fermé et borné.

Inversement, si A est borné, il est inclus dans un pavé $P = [a_1, b_1]\times\cdots\times[a_n, b_n]$ (par exemple dans une d_∞-boule fermée). Or P est compact (comme produit de compacts ; utiliser 4.4.11, 5.1.4 et 5.1.16), de sorte que, si A est fermé dans $\mathbb{R}^n$, sa compacité résultera de celle de P (voir 5.1.5), puisque A est aussi fermé dans P, d'après 4.3.10. □

5.1.18 Remarque : On verra dans 5.1.26 que ce résultat est encore vrai dans les e.v.n. de dimension finie.

5.1.19 Exemples (*en exercices*) : Pour les distances usuelles :

La sphère $\mathbf{S}_2^1$ est compacte (en donner plusieurs preuves) ; par suite, $\mathbf{S}_2^1$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$ (bien que ces espaces soient équipotents : voir 0.2.5) ; rappelons toutefois que $\mathbf{S}_2^1 - \{W\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$ (voir 4.3.3 et 4.3.4). La bijection continue $\varepsilon\ :]-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbf{S}_2^1\ :\ \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ n'est pas un homéomorphisme puisque $]-\pi,\pi]$ n'est pas compact (par contre, sa restriction $\varepsilon_0\ :]-\pi,\pi[\longrightarrow \mathbf{S}_2^1-\{W\}$ en est un, voir 4.3.3). Donner, parmi les exemples de 1.5.11, ceux qui sont compacts (en particulier, donner deux preuves différentes du fait que le tore $\mathbf{T}$ est compact).

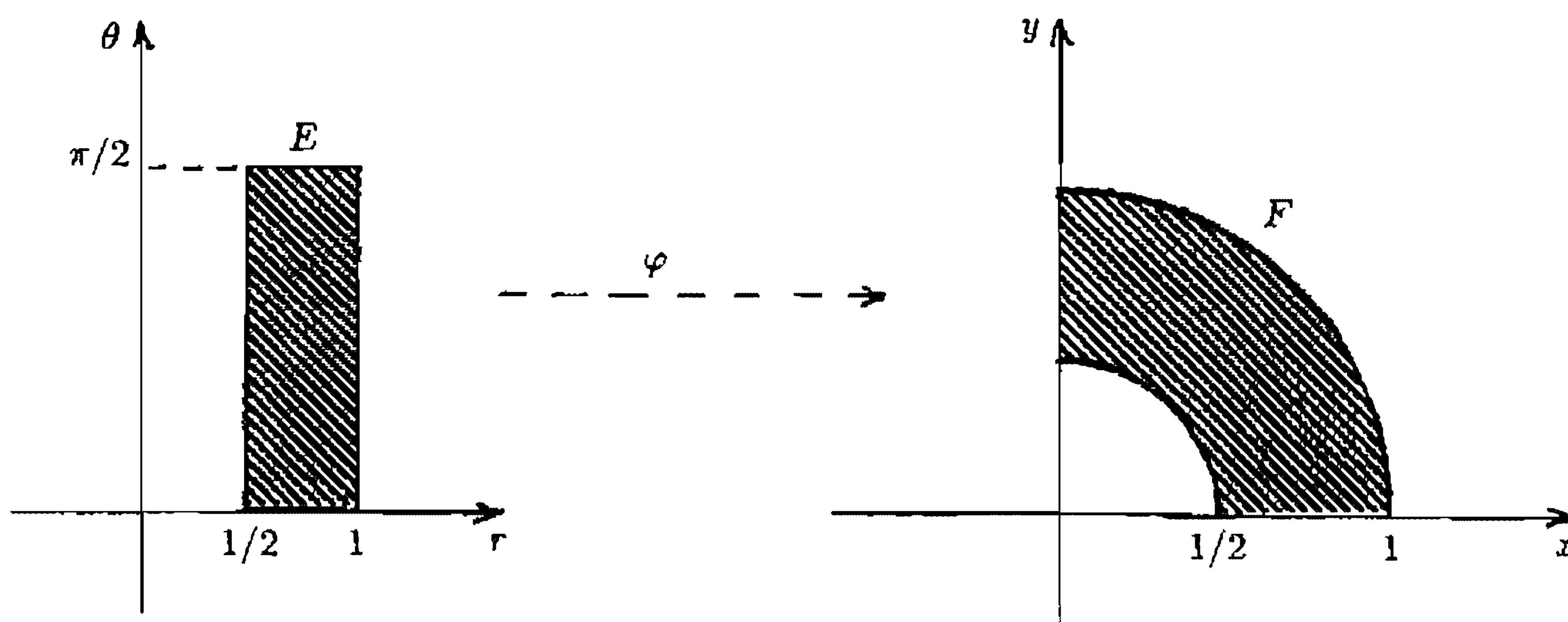


Figure 11 (5.1.19)

Soit $E = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1/2 \le r \le 1 \text{ et } 0 \le \theta \le \pi/2\}$ et $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \ge 0 \text{ et } 1/4 \le x^2 + y^2 \le 1\}$ (figure 11). Montrer que l'on a $E \simeq F$ pour les topologies usuelles (induites) de part et d'autre.

Soit $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^4 = 1\}$; Montrer que l'on a $X \simeq \mathbf{S}_2^1$ (pour la topologie usuelle induite).

Si A et B sont deux parties compactes d'un e.v.n., alors $A + B$ est compact ; si A est compact et B fermé, alors $A + B$ est fermé (on a déjà vu dans 4.4.12 que, si A et B sont fermés, alors $A + B$ n'est pas forcément fermé).

5.1.20 Proposition : Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, où E est un espace métrique compact non vide. Alors f est bornée et atteint ses bornes sur E.

Preuve : D'après 5.1.7 et 5.1.10, $f(E)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$ (donc bornée) qui vérifie $\inf f(E), \sup f(E) \in f(E)$; il existe donc deux éléments x_0, x_1 de E tels que $f(x_0) = \inf_{x\in E} f(x)$ et $f(x_1) = \sup_{x\in E} f(x)$. □

5.1.21 Exemples (*en exercices*) : Prouver que la d_∞-boule ouverte $B_\infty(f,r)$ de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ s'écrit $\{g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \mid \forall x \in [0,1] \quad |f(x)-g(x)| < r\}$ (voir 1.3.14).

Retrouver, à l'aide de 5.1.20, le fait que tout métrique compact est borné.

La "distance" $d(x,A)$ (voir 1.1.4) est atteinte en un point de A lorsque A est un compact non vide d'un espace métrique (le résultat est faux si l'on suppose seulement que A est non vide, fermé et borné) ; voir des contre-exemples dans 1.1.4 et 3.1.16. Se reporter aussi à 5.1.28 où l'on voit que $d(x,F)$ est atteinte dans le cas où F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un e.v.n. E ; dans le cas où E est un espace préhilbertien, cette distance est atteinte en un unique point $p_F(x)$ de F appelé la projection orthogonale de x sur F (voir 1.4.8 et 1.4.9) ; l'hypothèse que F est de dimension finie sera affaiblie dans la section VIII.1 ; et pourtant, d'après 5.1.3, un tel sous-espace F, s'il n'est pas réduit à $\{0\}$, n'est jamais compact !

En fait, dans $\mathbb{R}^n$, muni de l'une de ses distances usuelles d_p, il suffit qu'une partie non vide soit fermée pour que la distance d'un point à cette partie soit atteinte ! (voir [1] 3.2.4).

Dans $\mathbb{R}^2$, il existe un triangle de périmètre minimal dont les sommets sont dans trois boules euclidiennes fermées, disjointes deux-à-deux, données.

5.1.22 Corollaire : Soit E un espace métrique compact ; alors $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ est un fermé de l'espace $\mathcal{F}_b(E,\mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme (voir 2.1.20).

Preuve : Cela résulte du fait que $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$, inclus dans $\mathcal{F}_b(E,\mathbb{R})$ (voir 3.1.25, 4.3.10 et 5.1.20). □

5.1.23 Théorème (déjà cité dans 1.5.8) : Toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.

Preuve : D'après 1.3.5, il suffit de prouver le résultat pour $\mathbb{R}^n$ (le choix d'une base sur un espace vectoriel déterminant un isomorphisme isométrique qui respecte donc les équivalences de normes). Se référant à 1.5.7, il suffit de vérifier que toute norme sur $\mathbb{R}^n$ est équivalente à la norme $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ (où les x_i sont les coordonnées de x sur la base canonique $e_1,\dots,e_n$ de $\mathbb{R}^n$). Soit donc N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Remarquons déjà que l'on a l'inégalité $N(x) \overset{*}{\leq} \alpha||x||_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (où $\alpha = \sup_i N(e_i)$), puisque $N(x) = N(\sum_{i=1}^n x_i e_i) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq \alpha \sum_{i=1}^n |x_i| = \alpha||x||_1$.

On a déjà vu dans 1.6.8 que l'application $N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne, si l'on munit $\mathbb{R}^n$ de la distance associée à N (et $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle) ; en fait, elle l'est encore si l'on munit $\mathbb{R}^n$ de la distance d_1 associée à la norme $||\ ||_1$, puisque l'on peut écrire $|N(x)-N(y)| \leq N(x-y) \leq \alpha||x-y||_1$ pour tout $x,y \in \mathbb{R}^n$.

Comme $\mathbf{S}_1^1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x||_1 = 1\}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$, muni de la distance d_1 (c'est un fermé car $||\ ||_1$ est continue, c'est un borné car $\mathbf{S}_1^1 \subset B_1'(O,1)$), on sait, d'après 5.1.20, que N (qui est d_1-continue comme on vient de le remarquer) atteint sa borne inférieure sur $\mathbf{S}_1^1$: il existe un $z \in \mathbf{S}_1^1$ tel que $\beta = \inf_{x \in \mathbf{S}_1^1} N(x) = N(z) > 0$, l'inégalité stricte finale, résultant du fait que N ne s'annule pas sur $\mathbf{S}_1^1$. Par suite, on a $N(x) \geq \beta$ pour tout $x \in \mathbf{S}_1^1$, et donc aussi $N(x) = ||x||_1 N(x/||x||_1) \geq \beta||x||_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n - \{O\}$ (puisque $x/||x||_1 \in \mathbf{S}_1^1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n - \{O\}$) ; il en résulte que l'on a aussi l'inégalité $||x||_1 \overset{**}{\leq} \beta^{-1} N(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Les inégalités $\overset{*}{\leq}$ et $\overset{**}{\leq}$ prouvent que les normes N et $||\ ||_1$ sont équivalentes. □

5.1.24 Remarque : Il en résulte qu'il existe une seule topologie d'espace normé sur un espace vectoriel de dimension finie ; ainsi, la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$ est son unique topologie "normable" (voir 3.4.6).

5.1.25 Corollaire : Tout e.v.n. de dimension finie est homéomorphe isométriquement à un $\mathbb{R}^n$.

Preuve : L'espace E étant de dimension finie (disons n), toutes ses normes donnent la même topologie. Considérons, par exemple la norme $\|\ \|_1$ "transportée" sur E par l'isomorphisme $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$, associé au choix d'une base sur E (définie par $\|x\|_1 = \|\varphi(x)\|_1$; voir 1.3.5 et 1.6.12). Ainsi, φ est un isomorphisme isométrique et donc un homéomorphisme isométrique (voir 2.3.15). □

5.1.26 Corollaire : Dans les e.v.n. de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.

Preuve : D'abord, comme dans tout espace métrique, tout compact d'un e.v.n. (peu importe qu'il soit de dimension finie) est fermé et borné (voir 5.1.2 et 5.1.6).

Inversement, soit A une partie fermée et bornée d'un e.v.n. E de dimension n ; par 5.1.25, on sait qu'il existe un homéomorphisme isométrique $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Par suite, $\varphi(A)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ (φ étant une application fermée (voir 4.2.11) qui respecte les parties bornées (car φ est une isométrie)) . Utilisant 5.1.17, on sait que $\varphi(A)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$. Il reste alors à utiliser le fait que φ^{-1} est continue et 5.1.10 pour en déduire que $A = \varphi^{-1}(\varphi(A))$ est lui-même compact. □

5.1.27 Théorème (de Bolzano-Weierstrass) (déjà rencontée dans 2.1.8) : Toute suite bornée dans un e.v.n. de dimension finie possède une sous-suite convergente.

Preuve : Soit E un e.v.n. de dimension finie et (x_n) une suite bornée de points de E. Il existe donc une boule fermée qui contient la suite (x_n). Cette boule étant compacte (voir 5.1.26), la suite (x_n) possède une sous-suite convergente. □

5.1.28 Exemples *(en exercices)* : Le sous-groupe $O_n(\mathbb{R})$ de $M_n(\mathbb{R})$, formé des matrices orthogonales est un sous-espace compact (pour la topologie usuelle).

Dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme, la boule fermée $B'_\infty(0,1)$ n'est pas compacte, bien que fermée et bornée ; pour en savoir plus, voir 6.4.19 (le théorème de Riesz).

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un e.v.n. E, et x un point de E. Alors (voir 1.1.4) la "distance" $d(x, F)$ est atteinte en un point y de F (aucune raison, *a priori*, pour qu'un tel y soit unique (donner un exemple dans $(\mathbb{R}^2, \|\ \|_\infty)$), comme c'est le cas lorsque E est un espace préhilbertien, *i.e.* lorsque sa norme dérive d'un produit scalaire (voir 1.4.3 et 1.4.8)).

5.1.29 Proposition : Soit E et F deux e.v.n. tels que E soit de dimension finie. Alors toute application linéaire $u : E \longrightarrow F$ est continue.

Preuve : Supposons que E est de dimension n ; se référant à 5.1.25, il suffit de prouver le résultat pour $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\ \|_1$. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de $\mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $x = \sum_i x_i e_i \in \mathbb{R}^n$, on a $\|u(x)\| = \|\sum_{i=1}^n x_i u(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|u(e_i)\| \leq \alpha \sum_{i=1}^n |x_i| = \alpha \|x\|_1$, où $\alpha = \sup_i \|u(e_i)\|$; on utilise alors 2.4.1. □

5.1.30 Exemple (*en exercice*) : Tout sous-espace vectoriel d'un e.v.n. de dimension finie est fermé (voir aussi 6.4.18).

5.1.31 Proposition : Soit E, F et G trois e.v.n. tels que E et F soient de dimension finie. Alors toute application bilinéaire $B : E \times F \longrightarrow G$ est continue.

Preuve : Supposons E et F de dimensions respectives n et m ; tout comme dans 5.1.29, il suffit de prouver le résultat pour $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ munis de la norme $\|\ \|_\infty$. Soit $e_1, \ldots, e_n$ et $e'_1, \ldots, e'_m$ des bases de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. Alors pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n$ et $y = \sum_{j=1}^m y_j e'_j \in \mathbb{R}^m$, on a $\|B(x,y)\| = \|B(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e'_j)\| = \|\sum_{ij} x_i y_j B(e_i, e'_j)\| \leq \sum_{ij} |x_i|\,|y_j|\,\|B(e_i, e'_j)\| \leq \|x\|_\infty \|y\|_\infty \sum_{ij} \|B(e_i, e'_j)\| = \alpha \|x\|_\infty \|y\|_\infty$, où $\alpha = \sum_{ij} \|B(e_i, e'_j)\|$. Il reste donc à utiliser 2.4.7. □

2. ESPACES METRIQUES COMPACTS (II)

Soit (E, d) un espace métrique et (x_n) une suite de points de E ; notons $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des éléments de la suite (x_n).

5.2.1 Définition : Soit $a \in E$. On dit que a est une *valeur d'adhérence* de la suite (x_n) si la suite (x_n) possède une sous-suite qui converge vers a.

5.2.2 Remarque : Par définition, un espace métrique est compact ssi toute suite de points de cet espace admet une valeur d'adhérence (voir 5.1.1).

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (5.1.27), on sait que, dans un e.v.n. de dimension finie, toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.

5.2.3 Proposition : Toute suite convergente admet une seule valeur d'adhérence : sa limite.

Preuve : Résulte du fait que toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite (voir 2.1.4). □

5.2.4 Corollaire : Toute valeur d'adhérence de la suite (x_n) est adhérente à $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Preuve : Si a est une valeur d'adhérence de (x_n), alors a est limite d'une sous-suite (x_{n_k}) ; comme $x_{n_k} \in S$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que $a \in \overline{S}$. □

5.2.5 Exemples (*en exercices*) : Donner les valeurs d'adhérence pour les suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par $x_n = 1/n$ (où $n \neq 0$), $y_{2n} = n$, $y_{2n+1} = 0$ et $z_n = (-1)^n$.

5.2.6 Remarque : Il est faux, en général, que, si une suite ne possède qu'une seule valeur d'adhérence, elle converge vers cette valeur : voir la suite non convergente (y_n) de 5.2.5 qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence dans $(\mathbb{R}, d_u)$; en fait, on remarque que cette suite possède une autre valeur d'adhérence dans le métrique compact $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$: $+\infty = \lim y_{2n}$ (voir 3.3.5 et 5.1.15) … Cependant :

5.2.7 Proposition : Si, dans un espace métrique compact, une suite a une seule valeur d'adhérence, alors elle converge vers cette valeur.

Preuve : Soit E un espace compact, (x_n) une suite de points de E et a une

valeur d'adhérence de la suite (x_n) ; supposons que la suite (x_n) ne converge pas vers a. Il existe donc un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier $p \geq n$ vérifiant $x_p \notin B(a, \varepsilon)$ (voir 2.1.2) ; il en résulte que, si l'on note $C = B^c(a, \varepsilon)$, alors l'ensemble $X_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in C\}$ est infini. La suite (x_n) possède donc une sous-suite trace dans C (voir la proposition de 0.2.4). Comme E est compact, cette sous-suite possède elle-même une sous-suite convergente vers un $c \in C$ (puisque C est fermé). Cette dernière sous-suite étant aussi une sous-suite de la suite (x_n), la suite (x_n) possède donc deux valeurs d'adhérence distinctes : $a \in B(a, \varepsilon)$ et $c \in C = B^c(a, \varepsilon)$; on a ainsi prouvé la contraposée de la proposition. □

5.2.8 Théorème (du graphe fermé) : Soit E et K deux espaces métriques, le second étant compact. Si $f : E \longrightarrow K$ est une application dont le graphe $Gr(f) = \{(x, y) \in E \times K \mid y = f(x)\}$ est fermé dans $E \times K$ (muni de l'une des distances produit d_p), alors f est continue.

<u>*Preuve*</u> : Soit (x_n) une suite convergente dans E et x sa limite ; montrons que la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$ dans K. Comme K est compact, la suite $\big(f(x_n)\big)$ admet une valeur d'adhérence ; soit y l'une de ses valeurs d'adhérence. La suite $(f(x_n))$ admet donc une suite extraite $\big(f(x_{n_k})\big)$ qui converge vers y dans K. Considérons alors la suite correspondante $\big(x_{n_k}, f(x_{n_k})\big)$ dans $Gr(f)$. Bien sûr, comme $E \times K$ est muni de l'une de ses distances produit d_p, on a $(x, y) = \lim_k \big(x_{n_k}, f(x_{n_k})\big)$ (se rappeler que toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite). Comme $Gr(f)$ est fermé dans $E \times K$, on sait que $(x, y) \in Gr(f)$, c'est-à-dire que $y = f(x)$. On vient ainsi de prouver que $f(x)$ est l'unique valeur d'adhérence de la suite $\big(f(x_n)\big)$, qui converge donc vers $f(x)$, puisque K est compact (voir 5.2.7) ; c'est justement ce qu'il fallait démontrer. □

5.2.9 <u>Remarque</u> : On a établi ici une réciproque du fait que le graphe d'une application continue entre espaces métriques est fermé (voir 3.1.16, 4.4.6 et 4.4.7).

5.2.10 Proposition : a est une valeur d'adhérence de la suite (x_n) ssi il vérifie l'énoncé : $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N \quad d(a, x_n) < \varepsilon$ (ce qui s'exprime en disant que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $d(a, x_n) < \varepsilon$ pour une infinité d'indices).

<u>*Preuve*</u> : $\Longrightarrow$: Soit (x_{n_k}) une sous-suite convergente de la suite (x_n) qui converge vers a, et $\varepsilon > 0$; il existe donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $d(a, x_{n_k}) < \varepsilon$ pour tout $k \geq N$, de sorte que l'on a $d(a, x_n) < \varepsilon$ pour une infinité d'indices n.

$\Longleftarrow$: Construisons d'abord par récurrence une suite strictement croissante d'entiers : supposons définis $n_0 < n_1 < \cdots < n_{k-1}$, avec $n_0 = 0$. Par hypothèse il existe un entier $n_k > n_{k-1}$ vérifiant $d(a, x_{n_k}) \overset{\star}{<} 1/2^k$; on dispose donc, par construction, d'une suite d'entiers (n_k) strictement croissante, si bien que la suite (x_{n_k}) est une sous-suite de la suite (x_n). L'inégalité $\overset{\star}{<}$ étant vraie pour tout entier $k > 0$, on en déduit que $d(a, x_{n_k}) \longrightarrow 0$ (car la suite (n_k) tend vers $+\infty$ avec k : voir 0.2.1), *i.e.* que $x_{n_k} \overset{d}{\longrightarrow} a$. □

5.2.11 <u>Remarque</u> : Traduisons en termes de boules l'énoncé de la proposition 5.2.10 : a est une valeur d'adhérence de la suite (x_n) ssi, pour tout $\varepsilon > 0$, les x_n sont dans la boule $B_d(a, \varepsilon)$ pour une infinité d'indices n ; se référant à la section III.3, cela s'exprime aussi en disant que pour tout voisinage V de a, les x_n sont dans V pour une infinité d'indices n.

5.2.12 Proposition : Notons Adh l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n). Considérons aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $A_n = \{x_p \mid p \geq n\}$; alors Adh est un fermé de E, inclus dans $\overline{S}$ (où $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$), qui s'écrit $Adh = \bigcap_n \overline{A_n}$.

Preuve : L'inclusion $Adh \subset \overline{S}$ résulte de 5.2.4. On écrit ensuite : $x \in \bigcap_n \overline{A_n} \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad x \in \overline{A_n} \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \geq n \quad d(x, x_p) < \varepsilon \iff x \in Adh$. L'ensemble Adh est donc fermé comme intersection de fermés. □

5.2.13 Proposition : Soit (a_n) une suite bornée de réels. Alors l'ensemble Adh de ses valeurs d'adhérence est un compact non vide de $\mathbb{R}$ (pour sa distance usuelle) ; Adh est donc borné et, plus précisément, $\overline{\lim}_n a_n$ et $\underline{\lim}_n a_n$ sont respectivement la plus grande et la plus petite des valeurs d'adhérence de la suite (a_n) (voir 2.1.8 et 2.1.9).

Preuve : Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (2.1.8 et 5.1.27), on sait que Adh est non vide ; par ailleurs, on a vu dans 5.2.12 que Adh est fermé. Sa compacité résulte donc du fait qu'il est aussi borné (en effet, par hypothèse, la suite (a_n) est dans un intervalle du type $[-\alpha, \alpha]$, il en est donc de même de toutes ses sous-suites et de leurs limites éventuelles, puisque $[-\alpha, \alpha]$ est fermé ; ainsi $Adh \subset [-\alpha, \alpha]$). Plus précisément, montrons que l'on a $\sup Adh = \overline{\lim}_n a_n$. On a prouvé dans 2.1.8 que $\overline{\lim}_n a_n$ est un réel qui est limite d'une sous-suite de (a_n) ; on a donc $\overline{\lim}_n a_n \in Adh$, si bien que $\overline{\lim}_n a_n \leq \sup Adh$. Pour prouver l'inégalité inverse, on doit montrer que l'on a $a \leq \overline{\lim}_n a_n$ pour tout $a \in Adh$. Soit donc $a \in Adh$ et (a_{k_n}) une sous-suite de la suite (a_n) qui converge vers a ; la suite d'entiers (k_n) étant strictement croissante, on a $n \leq k_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir 0.2.1), et donc aussi $a_{k_n} \leq \sup_{p \geq n} a_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par un passage à la limite, on en déduit que $a = \lim_n a_{k_n} \leq \lim_n \sup_{p \geq n} a_p = \overline{\lim}_n a_n$. On a donc bien prouvé l'égalité $\sup Adh = \overline{\lim}_n a_n$, et donc ainsi le fait que $\overline{\lim}_n a_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite (a_n) (puisque $\overline{\lim}_n a_n \in Adh$). On prouve de même que $\underline{\lim}_n a_n = \inf Adh$, si bien que l'on a $Adh \subset [\underline{\lim}_n a_n, \overline{\lim}_n a_n]$. □

5.2.14 Exemples (*en exercices*) : On conserve les notations de 5.2.12. Donner des exemples de suites (x_n) pour lesquelles $Adh = \emptyset$, $Adh \subset S$ ou $S \cap Adh = \emptyset$. A-t-on toujours $\underline{\lim}_n x_n \leq \inf S \leq \sup S \leq \overline{\lim}_n x_n$?

En fait, pour toute suite dans un espace métrique, on a l'égalité $\overline{S} = S \cup Adh$; par suite, S est fermé ssi $Adh \subset S$ (et S est donc fermé lorsque Adh est vide).

5.2.15 Proposition : Soit F un espace métrique ; on munit $\mathbb{R} \times F$ de l'une des distances produit d_p ($\mathbb{R}$ étant muni de sa distance usuelle). On suppose que la projection canonique $\pi : \mathbb{R} \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ est fermée. Alors l'espace F est compact.

Preuve : Prouvons que toute suite d'éléments de F admet une valeur d'adhérence. Soit donc (y_n) une suite dans F (on note Adh et $\widehat{Adh}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (y_n) de F et de la suite $(1/n, y_n)$ de $\mathbb{R} \times F$) ; alors $\widehat{S} = \{(1/n, y_n) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ ne peut être fermé dans $\mathbb{R} \times F$, puisque $\pi(\widehat{S}) = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ (voir 3.2.15), et π est supposée fermée. Utilisant alors 5.2.14, on en déduit que $\widehat{Adh}$ est non vide, et donc aussi Adh, puisque $\pi'(\widehat{Adh}) \subset Adh$ (car la seconde projection $\pi' : \mathbb{R} \times F \longrightarrow F$ est continue). □

5.2.16 Remarque : On a vu dans 4.4.12 que les projections canoniques ne sont pas en général fermée ; cependant, voir 5.2.17 ci-dessous :

5.2.17 Théorème (de la projection fermée "métrique"). Soit E un espace métrique et K un espace métrique compact; alors la projection canonique $\pi : E \times K \longrightarrow E$ est fermée (en munissant $E \times K$ d'une distance produit).

Preuve : Soit A un fermé de $E \times F$ et (x_n) une suite de points de $\pi(A)$ qui converge vers un point x de E ; montrons que ce x est dans $\pi(A)$. Par hypothèse, il existe une suite (y_n) de points de K telle que l'on ait $(x_n, y_n) \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. K étant compact, la suite (y_n) possède une valeur d'adhérence y dans K, *i.e.* la suite (y_n) possède une sous-suite (y_{n_k}) qui converge vers y dans K. On dispose donc d'une suite (x_{n_k}, y_{n_k}) d'éléments de A qui converge vers (x, y) dans $E \times K$; comme A est supposé fermé, on a $(x, y) \in A$ et donc aussi $x = \pi(x, y) \in \pi(A)$. □

5.2.18 Proposition : Un espace métrique est compact ssi toute suite décroissante de fermés non vides a une intersection non vide.

Preuve : Soit E un espace métrique.

$\Longrightarrow$: Soit (F_n) une suite décroissante de fermés non vides de E. Choisissons un x_n dans chaque F_n (qui sont supposés non vides). On dispose ainsi d'une suite (x_n) dans E. Notons $Adh = \bigcap_n \overline{A_n}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n) (voir 5.2.12) ; alors Adh est non vide (puisque E est compact). Il reste donc à remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_n \subset F_n$ (pour $p \geq n$, on a $x_p \in F_p \subset F_n$), et donc aussi $\overline{A_n} \subset F_n$, puisque F_n est fermé. Il en résulte l'inclusion $\bigcap_n \overline{A_n} \subset \bigcap_n F_n$, ce qui implique que $\bigcap_n F_n$ est non vide.

$\Longleftarrow$: Soit (x_n) une suite de points de E ; on doit prouver qu'elle possède une sous-suite convergente, *i.e.* que l'ensemble Adh de ses valeurs d'adhérence est non vide. Mais c'est immédiat, vue notre hypothèse, puisque $Adh = \bigcap_n \overline{A_n}$, où $(\overline{A_n})$ est une suite décroissante de fermés non vides (car les $A_n = \{x_p \mid p \geq n\}$ sont non vides et forment eux-mêmes une suite décroissante). □

5.2.19 Exemples (*en exercices*) : Donner, dans $(\mathbb{R}, d_u)$, une suite décroissante de fermés non vides dont l'intersection est vide (on retrouve ainsi (voir 5.1.3) que $(\mathbb{R}, d_u)$ n'est pas compact).

Soit E un espace métrique compact, U un ouvert de E et (F_n) une suite décroissante de fermés de E vérifiant $\bigcap_n F_n \subset U$; il existe alors un entier n tel que $F_n \subset U$ (ce résultat est faux, si U n'est pas ouvert). Retrouver 5.2.7 à l'aide de ce qui précède.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue (où E et F sont des espaces métriques) et (K_n) une suite décroissante de compacts non vides de E ; on a alors l'égalité $f(\bigcap_n K_n) = \bigcap_n (f(K_n))$; ce résultat est faux si l'on suppose les K_n seulement fermés (on se rappelle que l'image directe ne commute en général pas aux intersections : voir 0.1.7).

5.2.20 Définition : Soit (P) une propriété vérifiée par une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties d'un ensemble E. On dira que *l'on peut extraire de la famille $(A_i)_{i \in I}$ une sous-famille finie possédant la même propriété* (P) s'il existe une partie finie I_0 de I telle que la famille $(A_i)_{i \in I_0}$ vérifie encore la propriété (P).

5.2.21 Théorème (de Borel-Lebesgue) : Dans un espace métrique (E, d), les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) E est compact,

(ii) toute suite décroissante de fermés non vides de E a une intersection non vide,

(iii) de toute famille de fermés de E dont l'intersection est vide, on peut extraire une sous-famille finie dont l'intersection est encore vide,

(iv) de tout recouvrement ouvert de E (voir 4.3.14), on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Preuve : (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) : Voir 5.2.18.

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) : Par passage au complémentaire.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) : Soit (F_n) une suite décroissante de fermés non vides de E. Si l'on avait $\bigcap_n F_n = \emptyset$, il existerait, par hypothèse, un nombre fini $F_{n_1}, \ldots, F_{n_p}$ de ces fermés dont l'intersection serait encore vide ; mais cette intersection finie est égale à l'un d'eux (la suite de fermés étant décroissante), d'où la contradiction.

(i) $\Longrightarrow$ (iv) : Soit (U_i) un recouvrement ouvert de E ; il s'agit de montrer qu'on peut en extraire un sous-recouvrement fini.

Prouvons d'abord que l'on a la propriété $(\star)$ suivante : il existe un $\varepsilon > 0$ tel que toute boule de rayon ε soit contenue dans l'un des U_i. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'un tel ε n'existe pas. Alors, pour tout entier n, il existe un point x_n de E tel que la boule $B(x_n, 1/n)$ ne soit contenue dans aucun des U_i. On dispose ainsi d'une suite (x_n) de points de E, dont, par hypothèse, on peut extraire une sous-suite convergente (x_{n_k}) ; notons $a_k = x_{n_k}$ et a la limite de cette sous-suite (a_k). Par construction, les boules $B(a_k, 1/n_k)$ ne sont donc contenues dans aucun des U_i. Comme $a \in U_{i_0}$ pour un certain i_0 et, comme U_{i_0} est ouvert, il existe une boule $B(a, r)$ contenue dans U_{i_0}. Les a_k sont donc tous dans la boule $B(a, r/2)$ à partir d'un certain rang N (car $a = \lim_k a_k$). Considérons alors un $k_0 \geq N$ tel que $1/n_{k_0} \leq r/2$ (un tel k_0 existe, puisque la suite $(1/n_k)$ converge vers 0) ; on dispose donc d'un k_0 et d'un i_0 pour lesquels on a les inclusions : $B(a_{k_0}, 1/n_{k_0}) \subset B(a, r) \subset U_{i_0}$ (en effet, si $d(x, a_{k_0}) < 1/n_{k_0}$, alors $d(x, a) \leq d(x, a_{k_0}) + d(a_{k_0}, a) < 1/n_{k_0} + r/2 \leq r$) ; d'où la contradiction.

Montrons que E peut être recouvert par un nombre fini de boules $B(x, \varepsilon)$ (où ε provient de la propriété $(\star)$ prouvée ci-dessus). Pour chaque x_n considéré ci-dessous, on désignera par U_{i_n} un ouvert du recouvrement ouvert (U_i) donné qui contient la boule $B(x_n, \varepsilon)$. Soit $x_1 \in E$; si $E = B(x_1, \varepsilon)$, le résultat est acquis (on a $E = U_{i_1}$). Sinon, il existe un $x_2 \in \big(B(x_1, \varepsilon)\big)^c$; si $E = B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$, c'est terminé (on a $E = U_{i_1} \cup U_{i_2}$), sinon il existe un $x_3 \in \big(B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)\big)^c$ ...et ce processus s'arrêtera au bout d'un nombre fini de fois : sinon, on aurait construit une suite (x_n) de E vérifiant la propriété $(\star\star)$: $d(x_n, x_p) \geq \varepsilon$ pour tout $n, p \in \mathbb{N}$; et les sous-suites de (x_n) possédant toutes cette propriété $(\star\star)$, aucune ne peut converger, ce qui est en contradiction avec notre l'hypothèse (i). On a donc établi l'existence d'un entier N tel que l'on ait $E = \bigcup_{1 \leq n \leq N} B(x_n, \varepsilon)$ et donc $E = \bigcup_{1 \leq n \leq N} U_{i_n}$. Ainsi, on a extrait du recouvrement initial formé des (U_i) un sous-recouvrement fini : celui constitué par les $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_N}$. □

5.2.22 Corollaire : Une partie A d'un espace métrique est compacte ssi, de toute famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E qui vérifie $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, on peut extraire une sous-famille finie vérifiant la même propriété.

Preuve : *a priori*, A est compact ssi A est un sous-espace compact (voir 5.1.1) ssi, de toute famille $(V_i)_{i\in I}$ d'ouverts de A qui vérifie $A = \bigcup_{i\in I} V_i$, on peut extraire une sous-famille finie vérifiant la même propriété (voir 5.2.21). Il reste donc à se rappeler que les ouverts du sous-espace A sont les traces sur A des ouverts de E (voir 4.3.5), et donc qu'ici, pour tout $i \in I$, il existe un ouvert U_i de E vérifiant $V_i = A \cap U_i \subset U_i$; par suite, l'égalité $A = \bigcup_{i\in I} V_i$ est équivalente à l'inclusion $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. □

5.2.23 Exemples (*en exercices*) : Retrouver (voir 5.1.3, 5.1.9 et 5.2.19) à l'aide de 5.2.21 (iv) et 5.2.22 que, pour la distance usuelle, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas compacts ; que dans un espace métrique, toute partie finie est compacte ; et qu'un espace discret est compact ssi il est fini.

5.2.24 Proposition : Soit (x_n) une suite convergente dans un espace métrique ; notons x sa limite. Alors $S' = S \cup \{x\}$ est compact (où $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$). On en donne ici une preuve utilisant 5.2.22 ; voir aussi 5.1.15.

Preuve : Supposons que $S' \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, où les U_i sont des ouverts de E. Alors, l'un des U_i (disons U_{i_0}) contient x, ainsi que tous les x_n à partir d'un certain rang N (puisque (x_n) converge vers x et U_{i_0} est un voisinage de x) ; il suffit donc, pour recouvrir S', de ne conserver (en plus de U_{i_0}) que N autres ouverts du recouvrement initial, chacun contenant l'un des x_n (avec $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$). □

5.2.25 Exemples (*en exercices*) : L'ensemble $A = \{(1/n, 1-1/n) \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(0,1)\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{1/n, 1-1/n\}$ est un compact de $\mathbb{R}$.

5.2.26 Théorème (de Dini) : Soit E un espace métrique compact et (f_n) une suite dans l'espace $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur E. On suppose que la suite (f_n) est croissante et qu'elle converge simplement vers une fonction $f \in \mathcal{C}(E,\mathbb{R})$. Alors (f_n) converge uniformément vers f (en fait, d'après 5.1.22, on a ici l'inclusion $\mathcal{C}(E,\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}_b(E,\mathbb{R})$; voir 2.1.19).

Preuve : Par hypothèse, on a $f_0(x) \leq f_1(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots \leq f(x)$ pour tout $x \in E$ (en fait, $\sup_n f_n(x) = \lim_n f_n(x) = f(x)$, d'après 2.1.7). Posons $g_n = f - f_n$ pour tout n ; la suite (g_n) est donc une suite décroissante de fonctions positives de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ qui converge simplement vers 0. Soit $\varepsilon > 0$; il s'agit donc de montrer qu'il existe un rang à partir duquel on a $\sup_{x\in E} g_n(x) \leq \varepsilon$, *i.e.* à partir duquel on a $g_n(x) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in E$. Posons $X_n = \{x \in E \mid g_n(x) \geq \varepsilon\}$. Les X_n forment donc une suite décroissante de fermés de E (car les g_n sont continues). On remarque que $\bigcap_n X_n = \emptyset$ (car pour $x \in \bigcap_n X_n$, on a $g_n(x) \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit le fait que $\lim_n g_n(x) = 0$) ; l'espace E étant compact, on a $X_{n_0} = \emptyset$ pour un certain entier n_0 (voir 5.2.21). Mais alors, pour tout $n \geq n_0$, on a, *a fortiori*, $X_n = \emptyset$, *i.e.* $0 \leq g_n(x) < \varepsilon$ pour tout $x \in E$. □

5.2.27 Remarque : On avait déjà remarqué dans 2.1.18 que la convergence simple n'implique pas la convergence uniforme.

3. ESPACES METRIQUES LOCALEMENT COMPACTS

5.3.1 Définition : Soit E un espace métrique. On dit que E est *localement compact* si tout point de E admet un voisinage compact (cette propriété est conservée si l'on remplace la distance par une distance qui lui est topologiquement équivalente). On dit qu'une partie A de E est localement compacte si elle l'est en tant que sous-espace.

5.3.2 Proposition : Un espace métrique E est localement compact ssi tout point de E admet une base de voisinages compacts.

Preuve : Soit E un espace métrique localement compact, x un point de E et V un voisinage de x ; montrons qu'il existe un voisinage compact de x, inclus dans V (voir 3.3.3). Or, d'après 3.3.5, on sait qu'il existe une boule fermée $B'(x,r)$ incluse dans V. Comme, par hypothèse, x possède aussi un voisinage compact K, on considère $W = K \cap B'(x,r)$. Ce W convient, puisque c'est un voisinage de x (voir 3.3.2) qui est compact (c'est un fermé de K) et qui est inclus dans V (puisqu'inclus dans $B'(x,r)$). La réciproque va de soi. □

5.3.3 Proposition : Tout ouvert (resp. tout fermé) d'un espace métrique localement compact est localement compact.

Preuve : Soit E un espace métrique localement compact, A une partie de E et x un point de A. On doit trouver un voisinage compact de x dans A, que A soit ouvert ou fermé. Supposons A fermé et soit K un voisinage compact de x dans E (un tel K existe par hypothèse). Alors $A \cap K$ est un voisinage de x dans A (voir 4.3.6) qui est compact (c'est un fermé de K). Si maintenant A est un ouvert, c'est un voisinage de x, il existe donc (d'après 5.3.2) un voisinage compact K de x inclus dans A, qui est donc aussi un voisinage compact de x dans A. □

5.3.4 Proposition : Dans un espace métrique, l'intersection de deux parties localement compactes est localement compacte.

Preuve : Soit A_1 et A_2 deux parties localement compactes d'un espace métrique E et x un point de $A_1 \cap A_2$; il s'agit de trouver un voisinage compact de x dans $A_1 \cap A_2$. Par définition, x possède deux voisinages compacts, l'un K_1 dans A_1, l'autre K_2 dans A_2. On remarque que $A_1 \cap K_2 = (A_1 \cap A_2) \cap K_2$ est un voisinage de x dans $A_1 \cap A_2$ (voir 4.3.6) ; il en est de même de $A_2 \cap K_1$, et donc aussi, d'après 3.3.2 et 5.1.8, du compact $K_1 \cap K_2 = (A_1 \cap K_2) \cap (A_2 \cap K_1)$ qui répond donc au problème posé. □

5.3.5 Proposition : Le produit de deux espaces métriques localement compacts est localement compact (pour les distances produit d_p de 1.1.9).

Preuve : Soit E et E' deux espaces métriques localement compacts et (x, x') un point de $E \times E'$; trouvons un voisinage compact de (x, x'). Par hypothèse, x et x' possèdent chacun un voisinage compact dans E et E' respectivement ; soit K et K' ces deux voisinages (chacun contenant une boule ouverte, centrée en x pour K, en x' pour K', que l'on peut choisir toutes deux de même rayon). Alors $K \times K'$ est un voisinage de (x, x') (car il contient la d_∞-boule ouverte produit des deux boules mentionnées ci-dessus ; voir 4.4.8 et 4.4.10) qui est compact, d'après 4.4.11 et 5.1.16 ; il convient donc. □

5.3.6 Proposition : Si E et F sont deux espaces métriques homéomorphes, alors E est localement compact ssi F est localement compact.

Preuve : Soit $f : E \longrightarrow F$ un homéomorphisme, où E est localement compact, et y un point de F. Soit $x = f^{-1}(y)$ et V un voisinage compact de x ; alors $x \in \overset{\circ}{V}$ et $y = f(x) \in f(\overset{\circ}{V}) \subset f(V)$, de sorte que $f(V)$ est un voisinage de y (car f est ouverte, d'après 4.2.11 ; plus précisément, voir 4.2.13) qui est compact, d'après 5.1.10. On a ainsi prouvé que F est localement compact. Pour la réciproque, on tient le même raisonnement en remplaçant f par f^{-1} et en échangeant E et F. □

5.3.7 Exemples (*en exercices*) : Tout espace discret est localement compact.

Bien sûr, tout métrique compact est localement compact ; la réciproque est évidemment fausse : considérer un espace discret infini (voir 5.1.3). Les $\mathbb{R}^n$, munis de leur distance usuelle (ainsi que tout e.v.n. de dimension finie non réduit à $\{0\}$), les cylindres sont métriques localement compacts non compacts.

Le complémentaire d'un compact dans un e.v.n. de dimension finie est localement compact.

Pour la distance usuelle, $S = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\mathbb{N}$ sont métriques localement compacts non compacts ; et S^c n'est pas localement compact (utiliser ce S^c pour prouver que les localement compacts ne sont stables, ni par réunions, ni par intersections infinies). Enfin, $\mathbb{Q}$ n'est pas localement compact.

5.3.8 Remarque : Grâce à 5.3.3, on sait que, dans un espace métrique compact, le complémentaire d'un point est localement compact.

5.3.9 Définition : Soit E un espace métrique localement compact et K un espace métrique compact ; on dit que K est un *compactifié d'Alexandroff métrique* de E s'il existe un point ω de K tel que E soit homéomorphe au sous-espace $K-\{\omega\}$ (qui est localement compact, comme on l'a remarqué dans 5.3.8) de K. Quand un tel compactifié d'Alexandroff métrique existe, on dit qu'il est obtenu par adjonction du *point à l'infini* ω.

5.3.10 Proposition : Soit E un espace métrique localement compact ; supposons qu'il possède un compactifié d'Alexandroff métrique K, *i.e.* qu'il existe une injection $f : E \longrightarrow K$ et un point ω de K tels que $\omega \notin f(E)$, $K = f(E) \cup \{\omega\}$ et $f : E \longrightarrow f(E)$ soit un homéomorphisme. Alors $f(E)$ est un ouvert de K, qui est dense dans K dans le cas où E n'est pas compact.

Preuve : $f(E)$ étant le complémentaire d'un point dans K, c'est un ouvert de K. Supposons que E n'est pas compact, et prouvons alors que ω est adhérent à $f(E)$ dans K. Soit V un voisinage ouvert de ω dans K ; il s'agit de prouver que V rencontre $f(E)$. Cela résulte immédiatement du fait que $K-V$ est un compact de $f(E)$ (c'est un fermé du compact K), qui diffère de $f(E)$, puisque $f(E)$, tout comme E (car $f : E \longrightarrow f(E)$ est un homéomorphisme), n'est pas compact. □

5.3.11 Proposition : Soit E un espace métrique localement compact, et K_1, K_2 deux espaces métriques compacts qui sont tous deux des compactifiés d'Alexandroff métriques de E ; alors K_1 est homéomorphe à K_2.

Preuve : Par hypothèse, il existe deux points ω_1 et ω_2 de K_1 et K_2 respectivement tels que $K_1-\{\omega_1\} \simeq E$ et $K_2-\{\omega_2\} \simeq E$, et donc tels que $K_1-\{\omega_1\} \simeq K_2-\{\omega_2\}$. On dispose donc d'un homéomorphisme $\varphi : K_1-\{\omega_1\} \longrightarrow K_2-\{\omega_2\}$, et

donc d'un prolongement $\varphi : K_1 \longrightarrow K_2$ en posant $\varphi(\omega_1) = \omega_2$. Montrons que ce prolongement est un homéomorphisme. Par construction, $\varphi : K_1 \longrightarrow K_2$ est une bijection dont la restriction à $K_1 - \{\omega_1\} \longrightarrow K_2 - \{\omega_2\}$ est un homéomorphisme. Il s'agit donc juste de prouver la continuité de φ et φ^{-1}, respectivement aux points ω_1 et ω_2. Soit V un voisinage ouvert de ω_2 dans K_2 ; alors $\overset{-1}{\varphi}(K_2 - V)$ est un compact de K_1, inclus dans $K_1 - \{\omega_1\}$ (puisque $K_2 - V$ est un compact de K_2, inclus dans $K_2 - \{\omega_2\}$, et $\varphi : K_1 - \{\omega_1\} \longrightarrow K_2 - \{\omega_2\}$ est un homéomorphisme) ; par suite, son complémentaire $\overset{-1}{\varphi}(V)$ dans K_1 est un ouvert de K_1 qui contient ω_1, donc un voisinage de ω_1. L'application φ est donc continue au point ω_1, d'après 4.2.3. Vue la symétrie du problème, φ^{-1} est continue au point ω_2. □

5.3.12 Proposition : Soit E_1 et E_2 deux espaces métriques localement compacts homéomorphes, et K un espace métrique compact ; alors K est un compactifié d'Alexandroff métrique de E_1 ssi c'est un compactifié d'Alexandroff métrique de E_2.

Preuve : Supposons que K soit un compactifié d'Alexandroff métrique de E_1 ; il existe donc un $\omega \in K$ tel que $E_1 \simeq K - \{\omega\}$, et donc tel que $E_2 \simeq K - \{\omega\}$; par suite, K est aussi un compactifié d'Alexandroff métrique de E_2. □

5.3.13 Exemples *(en exercices)* : (S', d_u) et $(\mathbb{N}', d')$ sont tous les deux des compactifiés d'Alexandroff métriques de (S, d_u) et $(\mathbb{N}, d_u)$ (où $S = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, $S' = S \cup \{0\}$, $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \cup \{0\}$ et d' est défini comme dans 2.3.15).

Pour les distances usuelles :

Les sphères de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^1_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$, $\mathbb{S}^1_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $\mathbb{S}^1_\infty = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sup(|x|,|y|) = 1\}$ et l'ellipse $El = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2/4) + y^2 = 1\}$ sont des compactifiés d'Alexandroff métriques de $\mathbb{R}$, de $]0,1[$ et de la parabole $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$. La courbe $\mathbb{S}^1_2 \star \mathbb{S}^1_2$ (voir 1.5.11) est un compactifié d'Alexandroff métrique de $\mathbb{R}^*$ et des hyperboles $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ et $H' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\}$ (figure 12).

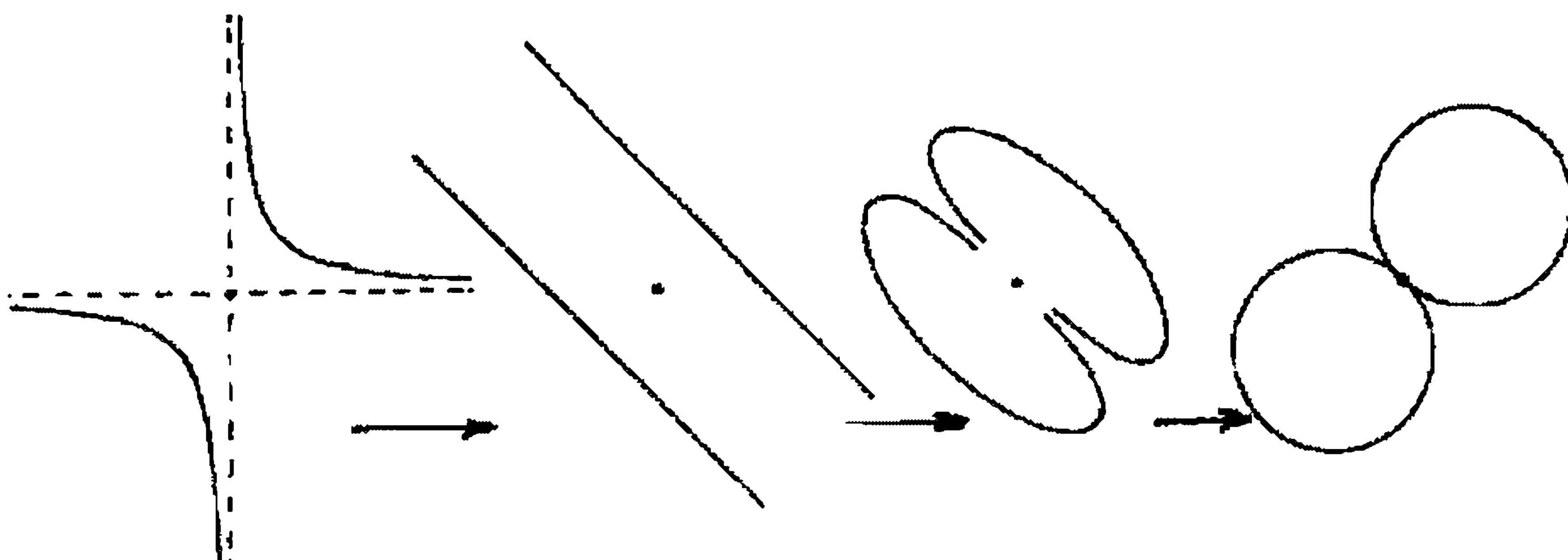


Figure 12 (5.3.13)

La sphère de $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^2_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ est un compactifié d'Alexandroff métrique de $\mathbb{R}^2$ et des boules ouvertes $B_2(O,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ et $B_\infty(O,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$.

5.3.14 Remarques : L'homéomorphisme $\Phi_2 : S_2^2 - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $\Phi_2(x,y,z) = (x/(1-z), y/(1-z))$, considéré dans les solutions de 5.3.13, s'appelle la projection stéréographique en dimension 2, de pôle N, sur $\mathbb{R}^2$ (voir 4.3.3, 4.3.4 et figure 13). Elle est utilisée en cartographie pour représenter sur un plan la géographie du globe terrestre.

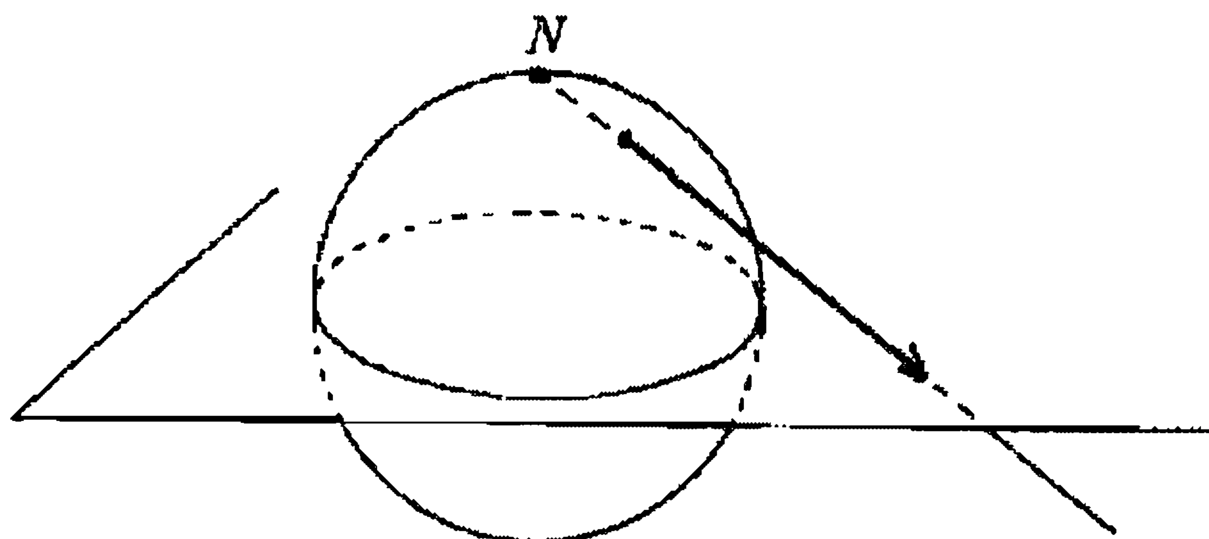


Figure 13 (5.3.14)

Sur les exemples étudiés dans 5.3.13, on voit qu'un compactifié d'Alexandroff métrique d'une courbe, lorsqu'il existe, s'obtient par adjonction d'un point ω auquel on vient rattacher toutes les branches "ouvertes" (comme les branches "infinies") de la courbe en question (en s'autorisant toutes les déformations élastiques possibles (voir 4.3.4 et figure 12)) ; on suit la même intuition pour les compactifiés d'Alexandroff métrique en dimension supérieure.

Un tel compactifié d'Alexandroff métrique n'existe pas toujours (en voir un exemple dans [1] 3.6.13) ; par contre, on a un théorème d'Alexandroff dans le cadre général topologique, qui dit que tout espace topologique localement compact (métrisable ou non) possède un compactifié d'Alexandroff "topologique" ...voir Epil 20 et Epil 21.

Chapitre VI
LES ESPACES METRIQUES COMPLETS

1. APPLICATIONS UNIFORMEMENT CONTINUES

Soit $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ une application.

6.1.1 Définitions : L'application $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ est *uniformément continue* si elle vérifie l'énoncé suivant :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x, y \in E \quad \big(d(x,y) < \eta \Longrightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon\big).$$

On dit que $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ est un *homéomorphisme uniforme* si c'est une bijection telle que $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ et $f^{-1} : (E',d') \longrightarrow (E,d)$ sont uniformément continues.

6.1.2 Proposition : On a les implications suivantes : f lipschitzienne $\Longrightarrow$ f uniformément continue $\Longrightarrow$ f continue (ces implications devenant des équivalences lorsque E et E' sont des e.v.n. et f linéaire).

Preuve : Pour la "lipschitziennité" et la continuité, se reporter à 1.6.1, 2.3.3, 2.3.6 et 2.3.14. Supposons d'abord f k-lipschitzienne ; soit $\varepsilon > 0$. Considérant alors $\eta = \varepsilon/k$, on obtient $d'(f(x), f(y)) \leq kd(x,y) < \varepsilon$ pour tout $x, y \in E$ vérifiant $d(x,y) < \eta$, ce qui prouve que f est uniformément continue. Supposons maintenant f uniformément continue, et donnons-nous un $\varepsilon > 0$; par définition, il existe un $\eta > 0$ tel que l'on ait $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tout $x, y \in E$ vérifiant $d(x,y) < \eta$. Pour tout $x \in E$ fixé, f vérifiera donc la propriété (C_x) de 2.3.3 avec ce η là ; ainsi f est bien continue.

Dans le cas où E et E' sont des e.v.n., on a vu dans 2.4.1 qu'une application linéaire est lipschitzienne ssi elle est continue ; les implications prouvées ci-dessus deviennent donc toutes des équivalences. □

6.1.3 Remarque : Malgré des similitudes évidentes entre la définition de la continuité et celle de la continuité uniforme, Il y a une différence essentielle, caractérisée par un échange de quantificateurs. En effet, dans le premier cas, la propriété (C_x) de la proposition 2.3.3 est vérifiée pour tout $x \in E$, ce qui se traduit par un énoncé commençant par : $\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \ldots$ (qui équivaut à $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in E \quad \exists \eta > 0 \ldots$) ; ici, le η en question dépend de x (de ε aussi, bien sûr). Alors que, dans le second cas, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in E \ldots$ signifie que le η doit être le même pour tous les x (bien qu'il puisse varier selon les ε).

6.1.4 Exemples (*en exercices*) : Pour la distance usuelle :

L'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est continue mais non uniformément continue (on a déjà vu dans 1.6.12 qu'elle n'est pas lipschitzienne) ; par contre, elle est uniformément continue si on la restreint à $[0,1]$, vu le théorème de Heine qui suit. En fait, un polynôme est uniformément continu ssi il est de degré ≤ 1 : c'est une

conséquence du fait que, si une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue, alors il existe $a, b > 0$ tels que l'on ait $|f(x)| \leq a|x| + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

L'application $x \mapsto 1/x$ n'est pas uniformément continue (on a déjà vu dans 1.6.12 qu'elle n'est pas lipschitzienne).

L'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue mais non lipschitzienne.

Contrairement au cas linéaire, une application bilinéaire continue n'est pas forcément lipschitzienne, ni même uniformément continue (voir 2.4.1 et 2.4.8) : plus précisément, $B \equiv 0$ est l'unique forme bilinéaire uniformément continue ; en particulier, le produit scalaire d'un espace préhilbertien n'est pas uniformément continu, bien que continu, d'après 2.3.20.

Bien sûr, toute isométrie bijective est un homéomorphisme uniforme.

6.1.5 Théorème (de Heine) : Toute application continue est uniformément continue lorqu'elle est définie sur un métrique compact.

Preuve : Soit $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ une application continue, l'espace métrique (E,d) étant compact. Supposons que f n'est pas uniformément continue ; il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n, y_n \in E$ vérifiant $d(x_n, y_n) < 1/n$ et $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. L'espace (E,d) étant compact, la suite (x_n) possède une sous-suite convergente ; soit (x_{n_k}) cette sous-suite et x sa limite. Considérons la sous-suite correspondante (y_{n_k}) ; comme elle vérifie $d(x, y_{n_k}) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y_{n_k}) < d(x, x_{n_k}) + 1/n_k$, on a $\lim_k d(x, y_{n_k}) = 0$, si bien que la suite (y_{n_k}) converge, elle aussi, vers x. Utilisant alors la continuité de f et de la distance d' (voir 1.6.7), on obtient $\lim_k d'(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) = d'(f(x), f(x)) = 0$, ce qui contredit le fait que l'on a $d'(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, vu que ε est strictement positif. □

6.1.6 Exemple (*en exercice*) : Toute fonction définie sur $[0, +\infty[$, continue (pour la topologie usuelle), et possédant une limite finie en $+\infty$, est uniformément continue.

6.1.7 Remarque : On vérifie facilement que le composé de deux applications uniformément continues est uniformément continu ; et que, si $f, g : E \longrightarrow E'$ sont deux applications uniformément continues (E et E' étant respectivement un espace métrique et un e.v.n..) et si λ est un réel, alors les applications $f + g$ et λf sont uniformément continues (pour ce dernier point, on peut utiliser le fait que, dans un e.v.n., l'addition et la multiplication par un scalaire sont lipschitziennes (voir 1.6.13), donc uniformément continues ... argument qui nous avait déjà servi dans le cas des applications lipschitziennes (voir 1.6.15) et des applications continues (voir 2.3.21)).

6.1.8 Théorème (de Stone-Weierstrass-Bernstein) : Toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur $[0,1]$.

Preuve : Soit f une fonction continue sur $[0,1]$; définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, la fonction polynomiale (voir 0.3.5) de degré $\leq n$ suivante : $(B_n(f))(x) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f(p/n) x^p (1-x)^{n-p}$. On va prouver que la suite $(B_n(f))$ converge uniformément vers f ; voyons d'abord quelques-unes de ses propriétés :

$$(B_n(1))(x) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p (1-x)^{n-p} = (x + (1-x))^n = 1 \qquad (1)$$

On dérive (1), puis on multiplie par $x(1-x)$; on obtient :

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p (1-x)^{n-p} (p - nx) = 0 \qquad (2)$$

On dérive (2), on utilise (1), puis on multiplie par $x(1-x)/n^2$; on obtient :

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p(1-x)^{n-p}(x-p/n)^2 = x(1-x)/n \qquad (3)$$

Enfin, grâce à (1), on obtient aussi :

$$|f(x)-(B_n(f))(x)| = |\sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p(1-x)^{n-p}(f(x)-f(p/n))| \qquad (4)$$

Prouvons maintenant que la suite $(B_n(f))$ converge uniformément vers f, *i.e.* pour la norme $\|\ \|_\infty$ sur $\mathcal{C}([0,1],R)$; voir 2.1.14. Soit $\varepsilon > 0$; il s'agit de trouver un $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $|f(x)-(B_n(f))(x)| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ et tout $x \in [0,1]$. L'application f étant continue sur le compact $[0,1]$, elle est en fait uniformément continue (d'après le théorème de Heine 6.1.5), de sorte qu'il existe un $\eta > 0$ tel que l'on ait $|f(x)-f(p/n)| < \varepsilon/2$ pour tout $x \in [0,1]$ et $p \leq n$ vérifiant $|x-p/n| < \eta$.

Fixons $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, et décomposons la somme du second membre de (4) en deux sommes, selon que $p \leq n$ vérifie $|x-p/n| < \eta$ ou non, pour écrire : $|f(x)-(B_n(f)(x)| \leq |\sum_{|x-p/n|<\eta} \cdots| + |\sum_{|x-p/n|\geq\eta} \cdots|$. Par (1), on obtient $|\sum_{|x-p/n|<\eta} \cdots| < \varepsilon/2 \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p(1-x)^{n-p} = \varepsilon/2$. Pour la seconde somme, on utilise le fait que f est bornée sur $[0,1]$ (voir 5.1.20) : Il existe un $M > 0$ tel que $|f(y)| \leq M$ pour tout $y \in [0,1]$, et donc tel que $|f(x)| \leq M$. Utilisant alors (3), on obtient $|\sum_{|x-p/n|\geq\eta} \cdots| \leq (2M/\eta^2)\sum_{|x-p/n|\geq\eta} C_n^p x^p(1-x)^{n-p}\eta^2 \leq (2M/\eta^2)\sum_{|x-p/n|\geq\eta} C_n^p x^p(1-x)^{n-p}(x-p/n)^2$ que l'on majore encore par $(2M/\eta^2)\sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p(1-x)^{n-p}(x-p/n)^2 \leq 2Mx(1-x)/n\eta^2$. Finalement, comme $\sup_{y\in[0,1]} y(1-y) = 1/4$, on obtient $|\sum_{|x-p/n|\geq\eta} \cdots| \leq M/2n\eta^2 < \varepsilon/2$ pour tout $n > M/\varepsilon\eta^2$; on choisit alors $N = 1 + [M/\varepsilon\eta^2]$, où $[a]$ est la partie entière de a. □

6.1.9 Remarques (*en exercice*) : En utilisant par exemple (2) et (3) de 6.1.8, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(B_n(f))(x) = x$ ou $x^2 + x(x-1)/n$, selon que $f(x) = x$ ou x^2. Les fonctions polynomiales $B_n(f)$ définies dans 6.1.8 sont appelées les *polynômes de Bernstein* de f.

On a établi dans 6.1.8 que la partie de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, formée des fonctions polynomiales sur $[0,1]$, est dense dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ pour la norme $\|\ \|_\infty$ de la convergence uniforme ; pour cela, le fait que $[0,1]$ est compact est essentiel. En fait, 6.1.8 est un cas particulier d'un théorème de Stone-Weierstrass général qui s'énonce ainsi :

6.1.10 Théorème (de Stone-Weierstrass) : Soit $\mathcal{A}$ une partie de l'espace $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ des fonctions continues sur un espace métrique compact E, vérifiant les conditions suivantes :

- $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ (*i.e.* telle que $f+g$, fg, λf sont des éléments de $\mathcal{A}$ pour tout $f,g \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: voir 0.3.5),
- $\mathcal{A}$ sépare les points de E (*i.e.* telle que, pour tout $x,y \in E$ vérifiant $x \neq y$, il existe un $f \in \mathcal{A}$ vérifiant $f(x) \neq f(y)$),
- pour tout $x \in E$, il existe un $g \in \mathcal{A}$ vérifiant $g(x) \neq 0$.

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ pour la norme de la convergence uniforme (voir 5.1.22).

Si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$, on doit rajouter la condition que le conjugué de tout élément de $\mathcal{A}$ est dans l'adhérence $\overline{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{C})$ (toujours pour la norme de la convergence uniforme).

Preuve : Voir [2]. □

6.1.11 Exemple (*en exercice*) : L'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0,1]$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant les hypothèses du théorème 6.1.10.

6.1.12 Proposition : Toute application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique (voir 0.4.7) est limite uniforme d'une suite de *polynômes trigonométriques* sur $\mathbb{R}$ (*i.e.* de la forme $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ avec tous les c_k dans $\mathbb{C}$).

Preuve : Soit $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$; c'est évidement un compact de $\mathbb{C}$. Considérons $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de $\mathcal{C}(\mathbf{S}^1, \mathbb{C})$ (l'espace des fonctions complexes continues et définies sur $\mathbf{S}^1$) engendrée par les applications $j(z) = z$, $\overline{j}(z) = \overline{z}$ et les constantes ; elle vérifie trivialement les conditions du théorème de Stone-Weierstrass complexe (on a $j(z) \neq j(z')$ et $1(z) = 1 \neq 0$ pour tout $z \neq z'$ dans $\mathbf{S}^1$). Par suite, $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbf{S}^1, \mathbb{C})$ pour la norme de la convergence uniforme ; en d'autres termes, toute application continue $\mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes en j et $\overline{j}$, *i.e.* de la forme $P(z) = \sum_{0 \leq p,q \leq n} a_{pq} z^p \overline{z}^q$ avec tous les a_{pq} dans $\mathbb{C}$. On va se ramener à ce résultat grâce à un isomorphisme d'algèbres (voir 0.3.5) isométrique : $\mathcal{C}(\mathbf{S}^1, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, où $\mathcal{C}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est l'espace des applications $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continues et 2π-périodiques (voir 0.4.7).

En fait, $\mathcal{C}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une sous-algèbre complexe de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, qui est incluse dans $\mathcal{F}_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (car, pour toute application $f \in \mathcal{C}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \sup_{x \in [0,2\pi]} |f(x)|$: on peut donc appliquer 5.1.20), si bien qu'on peut la munir aussi de la norme de la convergence uniforme (voir 2.1.20). Considérons alors la surjection 2π-périodique $\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{S}^1 : x \mapsto e^{ix}$; elle induit une bijection $\varphi : \mathcal{C}(\mathbf{S}^1, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : f \mapsto f \circ \varepsilon$ (avec $(\varphi^{-1}(g))(z) = g(x)$ où $x \in \mathbb{R}$ vérifie $z = \varepsilon(x)$) qui est trivialement un isomorphisme d'algèbres sur $\mathbb{C}$ et aussi une isométrie (car, pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathbf{S}^1, \mathbb{C})$, f et $\varphi(f) = f \circ \varepsilon$ ont les mêmes images dans $\mathbb{C}$). On transporte donc le résultat établi ci-dessus à l'aide de ce φ : l'ensemble $\varphi(\mathcal{A})$ (engendrée par $\varphi(j)$, $\varphi(\overline{j})$ et les constantes) est dense dans $\mathcal{C}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour la norme de la convergence uniforme ; en d'autres termes, toute application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes en $j \circ \varepsilon$ et $\overline{j} \circ \varepsilon$, *i.e.* de la forme $(\varphi(P))(x) = \sum_{0 \leq p,q \leq n} a_{pq} e^{ipx} e^{-iqx}$, ou encore $Q(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ avec $c_k = \sum_{k=p-q} a_{pq}$. □

2. COMPARAISON UNIFORME DES DISTANCES

6.2.1 Définitions : Soit d et d' deux distances sur un même ensemble E ; on dit que d est *uniformément comparable* à d' si l'une des applications identités $id : (E, d) \longrightarrow (E, d')$ ou $id : (E, d') \longrightarrow (E, d)$ est uniformément continue.

On dit que d et d' sont *uniformément équivalentes*, ce que l'on écrit $d \overset{Unif}{\sim} d'$, si les deux applications $id : (E, d) \longrightarrow (E, d')$ et $id : (E, d') \longrightarrow (E, d)$ sont uniformément continues (*i.e.* si l'identité $id : (E, d) \longrightarrow (E, d')$ est un homéomorphisme uniforme, voir 6.1.1).

La relation $d \overset{Unif}{\sim} d'$ est évidemment une relation d'équivalence.

6.2.2 Proposition : Soit d et d' deux distances sur un ensemble E ; on a les implications : $d \overset{Met}{\sim} d' \Longrightarrow d \overset{Unif}{\sim} d' \Longrightarrow d \overset{Top}{\sim} d'$.

Preuve : Il suffit d'appliquer 6.1.2 aux applications identités (pour les équivalences métriques et topologiques, se reporter à 1.5.1, 1.6.16, 2.2.4 2.2.6, 2.3.17 et 2.3.18). □

6.2.3 Proposition : Soit (E,d) un espace métrique compact et d' une autre distance sur E. On a alors l'équivalence : $d \overset{Top}{\sim} d' \iff d \overset{Unif}{\sim} d'$.

Preuve : Supposons que l'on ait $d \overset{Top}{\sim} d'$, *i.e.* que $id : (E,d) \longrightarrow (E,d')$ soit un homéomorphisme ; il en résulte que (E,d') est aussi un espace compact (voir 5.1.10). L'homéomorphisme identité est donc un homéomorphisme uniforme, d'après 6.1.5. □

6.2.4 Exemple (*en exercice*) : Soit (E,d) un espace métrique et $\delta_1 = \inf(1,d)$, $\delta_2 = d/(1+d)$; on a $\delta_1 \overset{Unif}{\sim} d \overset{Unif}{\sim} \delta_2$ (voir 1.5.4 et 2.2.9).

6.2.5 Remarques : On a vu dans 1.5.4 que δ_1 et δ_2 ne sont pas métriquement équivalentes à d, lorsque d n'est pas bornée. On en déduit que l'équivalence uniforme n'implique pas l'équivalence métrique, et donc que la continuité uniforme n'implique pas la "lipschiziennité" (ce que l'on avait déjà illustré dans 6.1.4).

Utilisant 6.2.1 et 2.4.5, on voit que pour des normes N et N' sur un même espace vectoriel, on a les équivalences : $N \sim N' \iff N \overset{Unif}{\sim} N' \iff N \overset{Top}{\sim} N'$.

3. SUITES DE CAUCHY

6.3.1 Définitions : Soit (E,d) un espace métrique et (x_n) une suite de points de E. On dit que (x_n) est une *suite de Cauchy* dans (E,d) (ou suite de Cauchy pour d, ou d-suite de Cauchy ...dans E) si elle vérifie l'énoncé :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

ce que l'on écrira $d(x_n, x_m) \longrightarrow 0$ lorsque $n, m \longrightarrow +\infty$.

On dit qu'une application $f : (E,d) \longrightarrow (E',d')$ est *Cauchy-continue* si, pour toute suite de Cauchy (x_n) dans (E,d), la suite $(f(x_n))$ est de Cauchy dans (E',d').

6.3.2 Proposition : Dans un espace métrique, toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve : Soit (x_n) une suite de Cauchy dans un espace métrique (E,d) ; elle vérifie donc $d(x_n,x_m) \longrightarrow 0$ lorsque $n,m \longrightarrow +\infty$. Rapidement dit, la suite de terme général $d(x_n,x_m)$ est bornée (voir 2.1.5), *i.e.* il existe un réel $\alpha > 0$ vérifiant $d(x_n,x_m) \leq \alpha$ pour tout $n,m \in \mathbb{N}$. Plus précisément, la suite (x_n) étant de Cauchy, on sait qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n,m \geq N$, on ait $d(x_n,x_m) \leq 1$, et donc tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $d(x_n,x_N) \leq 1$. Posons alors $\beta = \sup(1, d(x_0,x_N), d(x_1,x_N), \cdots, d(x_{N-1},x_N))$; on a bien $0 < \beta < +\infty$ et $d(x_n,x_N) \leq \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que $d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x_N) + d(x_N,x_m) \leq 2\beta$ pour tout $n,m \in \mathbb{N}$. □

6.3.3 Proposition : Soit (x_n) une suite dans un espace métrique (E,d) et $A_n = \{x_p \mid p \geq n\}$. Alors (x_n) est une suite de Cauchy ssi la suite des diamètres $(\delta(A_n))$ converge vers 0 (voir 1.1.3 pour le diamètre).

Preuve : La suite des A_n étant décroissante (pour l'inclusion dans E), la suite de ses diamètres $\delta(A_n)$ est aussi décroissante (pour l'ordre usuel de $\mathbb{R}$, voir 0.2.4) ; elle converge donc vers 0 ssi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\delta(A_N) \leq \varepsilon$, *i.e.* tel que l'on ait $d(x_n,x_m) \leq \varepsilon$ pour tout $n,m \geq N$. □

6.3.4 Proposition : Dans un espace métrique, toute suite convergente est de Cauchy ; toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

Preuve : Soit (x_n) une suite convergente dans l'espace métrique (E, d), et soit x sa limite. Le fait que (x_n) est une suite de Cauchy s'obtient grâce aux inégalités $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m)$, vraies pour tout $n, m \in \mathbb{N}$.

Si (x_n) est une suite de Cauchy et si (x_{n_k}) est une sous-suite de (x_n), on a bien $\lim_{k,l} d(x_{n_k}, x_{n_l}) = 0$ (les suites d'entiers (n_k) et (n_l) étant strictement croissantes, on a $k \leq n_k$ et $l \leq n_l$ pour tout entier k et l, si bien que $n_k \longrightarrow +\infty$ et $n_l \longrightarrow +\infty$, lorsque $k \longrightarrow +\infty$ et $l \longrightarrow +\infty$). □

6.3.5 Remarque (*en exercice*) : La réciproque du premier énoncé de 6.3.4 est fausse (voir 6.3.6) ; cependant voir 6.3.7, 6.3.8 et 6.4.1 ci-dessous.

6.3.6 Exemples (*en exercices*) : Une suite de rationnels, qui d_u-converge vers $\sqrt{2}$, est une d_u-suite de Cauchy non d_u-convergente dans $\mathbb{Q}$.

Dans $\mathbb{R}$, la suite (n) n'est pas une d_u-suite de Cauchy ; par contre, c'est une d-suite de Cauchy non d-convergente, où $d(x, y) = |\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y|$.

Dans un espace discret, les suites de Cauchy sont les suites stationnaires.

Dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, la suite (f_n), définie par $f_n(x) = \inf(n, x^{-1/2})$ et $f_n(0) = n$, est une suite de Cauchy non convergente pour la norme $\| \|_1$; de même, la suite (g_n), définie par $g_n(x) = \inf(n, x^{-1/3})$ et $g_n(0) = n$, est une suite de Cauchy non convergente pour la norme $\| \|_2$.

Dans $\mathbb{R}[X]$, la suite de polynômes (P_n) définie par $P_n(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n$ n'est de Cauchy pour aucune des normes $\| \|_p$ de 1.3.7 ; les suites (Q_n) et (R_n), définies par $Q_n(X) = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \cdots + \frac{1}{n}X^n$ et $R_n(X) = 1 + X + \frac{1}{2^2}X^2 + \cdots + \frac{1}{n^2}X^n$, sont des suites de Cauchy non convergentes ((Q_n), seulement pour les normes $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$; et (R_n), pour les normes $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$).

6.3.7 Proposition : Toute suite de Cauchy, d'un espace métrique, qui possède une sous-suite convergente est elle-même convergente (vers la même limite).

Preuve : Soit (x_n) une suite de Cauchy dans l'espace métrique (E, d), et supposons que (x_{n_k}) en soit une sous-suite convergente ; notons x sa limite. Pour conclure, il suffit de considérer les inégalités $d(x_k, x) \leq d(x_k, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x)$, vraies pour tout $k \in \mathbb{N}$ (on a bien $d(x_k, x_{n_k}) \longrightarrow 0$, puisque, par définition d'une sous-suite, on a $k \leq n_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc $n_k \longrightarrow +\infty$ lorsque $k \longrightarrow +\infty$). □

6.3.8 Corollaire : Dans un espace métrique compact, toute suite de Cauchy converge.

Preuve : Car un métrique compact est caractérisé par le fait que toute suite (de Cauchy ou non) possède une sous-suite convergente (voir 5.1.1 et 6.3.7). □

6.3.9 Proposition : Toute application uniformément continue est Cauchy-continue (voir 6.3.1).

Preuve : Soit $f : (E, d) \longrightarrow (E', d')$ une application uniformément continue et (x_n) une suite de points de E qui est de Cauchy pour d ; prouvons que la suite $(f(x_n))$ est de Cauchy pour d'. Soit donc $\varepsilon > 0$; l'hypothèse sur f implique qu'il existe un $\eta > 0$ tel que l'on ait $d'(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ vérifiant $d(x_n, x_m) < \eta$. La suite (x_n) étant de Cauchy pour d, il existe un

$N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n, m \geq N$, on ait $d(x_n, x_m) < \eta$, et donc *a fortiori* $d'(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$, d'après ce qui précède. □

6.3.10 Remarque (*en exercice*) : Le résultat de 6.3.9 est faux si l'on suppose f seulement continue. On verra dans 6.4.13 que la réciproque de 6.3.9 est fausse.

6.3.11 Exemple (*en exercice*) : Toute application Cauchy-continue est continue ; (mais pas forcément uniformément continue, d'après 6.4.13). La réciproque est fausse (voir 6.3.10) ; sauf dans les espaces complets (voir 6.4.13).

6.3.12 Corollaire : Soit $f : (E, d) \longrightarrow (E', d')$ un homéomorphisme uniforme (voir 6.1.1), et (x_n) une suite de points de E. On a l'équivalence : (x_n) est une suite de Cauchy dans (E, d) ssi $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy dans (E', d').

Preuve : évidente. □

6.3.13 Proposition : Soit d et d' deux distances uniformément comparables sur un ensemble E (voir 6.2.1), par exemple, si l'identité $id : (E, d) \longrightarrow (E, d')$ est uniformément continue ; alors toute d-suite de Cauchy est une d'-suite de Cauchy. En particulier, deux distances uniformément équivalentes possèdent les mêmes suites de Cauchy.

Preuve : On applique 6.3.9 et 6.3.12 à l'identité $id : (E, d) \longrightarrow (E, d')$. □

6.3.14 Remarque : On rappelle que deux distances uniformément équivalentes possèdent aussi les mêmes suites convergentes, puisqu'elles sont topologiquement équivalentes (voir 6.2.2 et 2.2.7).

6.3.15 Exemples : Soit (E, d) un espace métrique ; les distances d, $\delta_1 = \inf(1, d)$ et $\delta_2 = d/(1 + d)$ possèdent les mêmes suites de Cauchy (voir 6.2.4 et 6.3.13) ; il en est de même pour les distances usuelles sur les $\mathbb{R}^n$, d'après 1.5.7.

Sur $\mathbb{R}[X]$, les normes $\| \ \|_p$ ne possèdent pas les mêmes suites de Cauchy : considérer par exemple la suite (Q_n) donnée dans 6.3.6 (les suites (P_n) et (R_n) n'étant d'aucune utilité ici, puisque la première n'est de Cauchy pour aucune de ces normes, alors que la deuxième est de Cauchy pour chacune). En fait, ça n'est pas étonnant puisque ces normes ne sont pas équivalentes sur $\mathbb{R}[X]$ (voir 2.4.10) !

6.3.16 Corollaire : Soit $(E_1, \delta_1), \ldots, (E_n, \delta_n)$ des espaces métriques. On munit l'ensemble $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ de l'une des distances produit d_p de 1.1.9. Alors, (x_k) est une suite de Cauchy dans (E, d_p) ssi chaque suite projection (x_{ki}) est une suite de Cauchy dans (E_i, δ_i).

Preuve : D'abord, les distances d_p étant uniformément équivalentes (car métriquement équivalentes), elles possèdent les mêmes suites de Cauchy.

Pour $\Longrightarrow$, se rappeler que les projections canoniques sont lipschitziennes, et donc uniformément continues (voir 1.6.5 et 6.1.2). Pour $\Longleftarrow$, il suffit de considérer $d_1(x_k, x_l) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i(x_{ki}, x_{li})$. □

4. ESPACES METRIQUES COMPLETS

6.4.1 Définition : On dit qu'un espace métrique est *complet* si, dans cet espace, toute suite de Cauchy est convergente.

6.4.2 Exemples (*en exercices*) : Tout espace discret est complet (d'après **2.1.3** et 6.3.6). S'inspirant de 6.3.5 et 6.3.6, on voit que les espaces suivants ne sont pas complets : $(]0, +\infty[, d_u)$; $(\mathbb{Q}, d_u)$; $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \| \|_p)$ pour $p = 1, 2$; $(\mathbb{R}[X], \| \|_p)$ (et donc aussi $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \| \|_p)$, vu l'isomorphisme isométrique $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ de 0.3.3 ; voir 1.3.7) pour $p = 1, 2, \infty$. On remarque en passant qu'aucun de ces espaces n'est compact (aucun n'étant borné ! voir 1.5.3).

Un espace métrique E est complet ssi il existe une partie F de E, dense dans E, qui vérifie la propriété (P) suivante : toute suite de Cauchy dans F converge dans E.

6.4.3 Proposition : Un espace métrique est complet ssi toute suite décroissante de fermés non vides, dont les diamètres forment une suite qui converge vers 0, a une intersection non vide (voir 1.1.3 pour le diamètre).

Preuve : Soit (E, d) un espace métrique.

$\Longrightarrow$: Soit (F_n) une suite décroissante de fermés non vides de E vérifiant $\lim_n \delta(F_n) = 0$. Choisissons un x_n dans chaque F_n (qui sont supposés non vides) ; on dispose ainsi d'une suite (x_n) dans E. Considérons $A_n = \{x_p \mid p \geq n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A_n \subset F_n$ (pour $p \geq n$, on a $x_p \in F_p \subset F_n$), on en déduit que l'on a $\delta(A_n) \leq \delta(F_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc que $\lim \delta(A_n) = 0$; la suite (x_n) est donc une suite de Cauchy (d'après 6.3.3). L'espace (E, d) étant complet, la suite (x_n) converge vers un $x \in E$. Remarquant alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(x_p)_{p \geq n}$ est une suite de points de F_n qui converge vers x (c'est une suite extraite), on en déduit que $x \in F_n$ (car F_n est fermé) ; et ceci, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que $x \in \bigcap_n F_n$, et donc que $\bigcap_n F_n$ est non vide.

$\Longleftarrow$: Soit (x_n) une suite de Cauchy dans (E, d) et $A_n = \{x_p \mid p \geq n\}$; on a donc $\lim_n \delta(A_n) = 0$. Par ailleurs, les $\overline{A_n}$ forment une suite décroissante (car la suite (A_n) décroît) de fermés non vides (les A_n étant non vides) et vérifiant $\lim_n \delta(\overline{A_n}) = 0$ (puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\delta(\overline{A_n}) = \delta(A_n)$: voir 4.4.12). Par hypothèse, on a donc $\bigcap_n \overline{A_n} \neq \emptyset$, *i.e.* la suite (x_n) possède une valeur d'adhérence (voir 5.2.12). Utilisant alors 6.3.7, on en déduit que la suite (x_n) converge. □

6.4.4 Remarques : En fait, dans $\Longrightarrow$, on obtient $\bigcap_n F_n = \{x\}$: cela résulte du fait que $\delta(\bigcap_n F_n) = 0$ (car on a $\delta(\bigcap_n F_n) \leq \delta(F_n)$ pour tout n).

L'hypothèse que $\delta(F_n) \longrightarrow 0$ est essentielle : dans l'espace complet $(\mathbb{R}, d_u)$ (voir 6.4.11), la suite décroissante de fermés $[n, +\infty[$ a une intersection vide.

6.4.5 Proposition : Tout espace métrique compact est complet.

Preuve : Il suffit d'utiliser 6.3.8 ; ou bien d'utiliser 5.2.18 et 6.4.3 ci-dessus ! □

6.4.6 Remarque : La réciproque de 6.4.5 est fausse : pour la distance usuelle, $\mathbb{R}$ n'est pas compact alors qu'il est complet (voir 6.4.11) ; voir aussi les exemples donnés dans 6.4.2.

6.4.7 Proposition : Soit E et E' des espaces métriques et $f : E \longrightarrow E'$ un homéomorphisme uniforme (voir 6.1.1) ; on a alors l'équivalence : E est complet ssi E' est complet.

Preuve : Il suffit d'utiliser 6.3.12, et le fait qu'un homéomorphisme uniforme est aussi un homéomorphisme : supposons (E, d) complet, et soit (x'_n) une d'-suite de Cauchy dans E' ; alors $(f^{-1}(x'_n))$ est une d-suite de Cauchy dans E, donc d-convergente puisque (E, d) est complet ; la suite $(x'_n) = (f(f^{-1}(x'_n)))$ d'-converge donc aussi, ce qui prouve que (E', d') est complet. Pour la réciproque, on procède de manière identique en remplaçant f par f^{-1}. □

6.4.8 Corollaire : Si d et d' sont deux distances uniformément équivalentes sur un même ensemble E, alors (E, d) est complet ssi (E, d') est complet.

Preuve : On applique 6.4.7 à l'identité $id : (E, d) \longrightarrow (E, d')$, vu 6.2.1. □

6.4.9 Remarque : Le résultat de 6.4.7 est faux si l'on suppose seulement que f est un homéomorphisme (condidérer $\mathbb{R}$ et $]0, 1[$, munis de la distance usuelle ; voir 4.3.3, 6.4.10 et 6.4.15). La notion d'espace complet n'est donc pas une propriété topologique, en ce sens que c'est une propriété non respectée par les homéomorphismes, contrairement aux notions d'espace compact et d'espace connexe (voir 5.1.11, 39.5 et 40.19).

En fait, si l'on observe la preuve de 6.4.7, on peut affaiblir la notion d'homéomorphisme uniforme tout en respectant encore les espaces complets (et pour cela, il suffit de respecter les suites de Cauchy, les suites convergentes étant *a fortiori* respectées, puisque toute application Cauchy-continue est continue, d'après 6.3.11) : c'est, en effet, la notion d'*homéomorphisme de Cauchy* (*i.e.* bijectif, Cauchy-continu ainsi que son inverse, voir 6.3.1) qui est la bonne notion pour respecter les espaces complets.

Pour une application $f : E \longrightarrow E'$, où E et E' sont des espaces métriques, on a les implications : f est une isométrie bijective $\Longrightarrow$ f est un homéomorphisme uniforme $\Longrightarrow$ f est un homéomorphisme de Cauchy $\Longrightarrow$ f est un homéomorphisme ; ces implications étant des équivalences lorsque E et E' sont des e.v.n. et f une application linéaire. Bien sûr, on a une notion de *Cauchy-équivalence*, pour deux distances d et d' (sur un même ensemble E) ayant les mêmes suites de Cauchy, qui s'intercalle strictement entre les équivalences uniformes et topologiques (voir 6.2.2) ; pour de telles distances d et d' Cauchy-équivalentes sur l'ensemble E, on a donc l'équivalence : (E, d) est complet $\Longleftrightarrow$ (E, d') est complet. En particulier, si d et d' dérivent respectivement des normes N et N' (E étant dans ce cas un espace vectoriel), la liste des équivalences : $N \sim N' \Longleftrightarrow N \overset{Unif}{\sim} N' \Longleftrightarrow N \overset{Top}{\sim} N'$, citée dans 6.2.5, se complète à l'aide de : $\Longleftrightarrow$ N et N' sont Cauchy-équivalentes.

6.4.10 Proposition : Tout e.v.n. de dimension finie est complet.

Preuve : Soit E un e.v.n. de dimension finie (peu importe la norme sur E, d'après 5.1.23, 6.4.8 et 6.4.9) et (x_n) une suite de Cauchy dans E. Cette suite étant bornée (voir 6.3.2), il existe une boule fermée qui la contient. Cette boule étant complète (car compacte : voir 5.1.26 et 6.4.5), la suite (x_n) converge. □

6.4.11 Remarque : En particulier, les $\mathbb{R}^n$ (et donc $\mathbb{C}$, $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$) sont complets pour les normes usuelles ; ce que l'on peut retrouver à l'aide de la proposition suivante :

6.4.12 Proposition : Soit $(E_1, \delta_1), \dots, (E_n, \delta_n)$ des espaces métriques complets. On munit l'ensemble $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ de l'une des distances produit d_p de 1.1.9. Alors, (E, d_p) est complet. La réciproque est vraie si les E_i sont tous non vides.

Preuve : Remarquons d'abord que, les distances d_p étant uniformément équivalentes (puisque métriquement équivalentes), (E, d_1) est complet ssi (E, d_2) est complet ssi (E, d_∞) est complet.

Soit (x_k) une d_p-suite de Cauchy dans E ; on a vu dans 6.3.16 que chaque projection (x_{ki}) est une δ_i-suite de Cauchy dans E_i. L'espace (E_i, δ_i) étant complet, la suite (x_{ki}) δ_i-converge ; soit l_i sa limite. Alors la suite (x_k) d_p-converge vers $(l_1, \dots, l_n)$ dans E (voir 2.1.13). Inversement, supposons (E, d_p) complet et prouvons que (E_i, δ_i) l'est aussi. Soit donc (x_{ki}) une δ_i-suite de Cauchy dans E_i. Fixons un $a_j \in E_j$ pour tout $j \neq i$ (c'est possible puisque les E_j sont non vides), et considérons, pour chaque entier k, $x_k = (x_{kj})$, où $x_{kj} = a_j$ pour tout $j \neq i$; d'après 6.3.16, on a ainsi défini une d_p-suite de Cauchy (x_k) dans E (dont les projections dans chacun des E_j, pour $j \neq i$, sont des suites constantes (sur a_j)). L'espace (E, d_p) étant complet, la suite (x_k) d_p-converge dans E ; chacune de ses suites projections converge donc, en particulier, (x_{ki}) δ_i-converge dans E_i. □

6.4.13 Exemples (*en exercices*) : $\mathbb{R}$ est complet pour les distances $d_u(x,y) = |x-y|$, $\delta_1(x,y) = \inf(1, |x-y|)$ et $\delta_2(x,y) = |x-y|/(1+|x-y|)$; par contre, $\mathbb{R}$ n'est pas complet pour la distance $d(x,y) = |\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y|$: on a $d \overset{Unif}{\not\sim} d_u$ sur $\mathbb{R}$ (elles ne sont pas plus Cauchy-équivalentes, voir 6.3.6 et 6.4.9 ; on se rappelle que l'on a $d \overset{Met}{\not\sim} d_u$ et $d \overset{Top}{\sim} d_u$ sur $\mathbb{R}$, voir 1.5.4 et 2.2.9) ; par contre, $d \overset{Unif}{\sim} d_u$, et même $d \overset{Met}{\sim} d_u$ sur $[1,2]$. Etude analogue pour les distances $d'(x,y) = |1/x - 1/y|$ et $d''(x,y) = |\log x - \log y|$ sur $]0, +\infty[$ (on a $(]0,+\infty[, d'')$ complet, contrairement à $(]0,+\infty[, d_u)$; la suite $(1/n)$ est d_u-Cauchy, bien que non d''-Cauchy).

Pour une application définie sur un espace métrique complet, la continuité équivaut à la Cauchy-continuité (voir 6.3.11 ; et le théorème de Heine 6.1.5 !).

Pour la distance usuelle sur $\mathbb{R}$, l'application $x \mapsto x^2$ est Cauchy-continue, bien que non uniformément continue (voir 6.1.4 et 6.3.10) ; sa restriction à $]0, +\infty[$ est donc un homéomorphisme de Cauchy (voir 6.4.9 et 6.1.4), non uniforme.

Soit (x_n) et (y_n) deux suites de Cauchy dans un espace métrique (E, d). Alors la suite $(d(x_n, y_n))$ converge dans $(\mathbb{R}, d_u)$. Lorsque la suite $(d(x_n, y_n))$ converge vers 0, on dit que les suites (x_n) et (y_n) sont *d-équivalentes* (même si elles ne sont pas de Cauchy). Soit alors (E', d') un autre espace métrique, $f : (E, d) \longrightarrow (E', d')$ une application Cauchy-continue, et (x_n) et (y_n) deux suites de Cauchy d-équivalentes ; alors les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ sont d'-Cauchy et d'-équivalentes.

Soit H un espace préhilbertien ; alors son produit scalaire $<,>: H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application Cauchy-continue (on a vu dans 2.3.20 et 6.1.4 que c'est une application continue, mais non uniformément continue).

Contrairement à ce qui se passe pour les espaces métriques compacts (voir 6.4.5), un espace métrique localement compact (voir 5.3.1) n'est pas forcément complet (donner deux espaces localement compacts non compacts, l'un étant complet et l'autre ne l'étant pas).

6.4.14 Proposition : Tout sous-espace fermé dans un espace métrique complet est lui-même complet.

Preuve : Soit E un espace métrique complet, A un fermé de E et (x_n) une suite de Cauchy dans le sous-espace A ; comme c'est aussi une suite de Cauchy dans E, elle converge vers une limite l dans E (dans A, en fait, car A est fermé). □

6.4.15 Proposition : Tout sous-espace complet d'un espace métrique est fermé dans cet espace métrique.

Preuve : Soit E un espace métrique et F un sous-espace complet ; montrons que F est fermé dans E. Soit (y_n) une suite de points de F qui converge vers x dans E ; prouvons que x est dans F. Cette suite (y_n) est donc une suite de Cauchy dans F (puisque c'est une suite de Cauchy dans E). Comme F est complet, la suite (y_n) converge aussi vers un $y \in F$. Par unicité de la limite d'une suite convergente dans l'espace métrique E, on a $x = y \in F$; ainsi F est fermé. □

6.4.16 Proposition : Dans un espace métrique, une réunion de deux sous-espaces complets est complète ; toute intersection non vide de sous-espaces complets est complète.

Preuve : Soit E un espace métrique et A et B deux sous-espaces complets. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $A \cup B$; montrons qu'elle converge dans $A \cup B$. Utilisant la proposition de 0.2.4, on sait que la suite (x_n) possède une sous-suite trace dans A ou dans B. Supposons par exemple qu'elle en possède une dans A. Comme A est supposé complet, cette sous-suite (qui est de Cauchy dans A, d'après 6.3.4) converge dans A (et donc dans $A \cup B$) ; la suite (x_n) converge donc vers la même limite (voir 6.3.7).

Soit maintenant (A_i) une famille non vide de sous-espaces complets ; tous les A_i sont donc fermés dans E, d'après 6.4.15. Leur intersection $\bigcap_i A_i$ est donc fermée dans E et donc dans chacun des sous-espaces A_i (d'après 4.3.10) ; les A_i étant complets, $\bigcap_i A_i$ est donc complet (voir 6.4.14). □

6.4.17 Exemple (*en exercice*) : Donner une réunion infinie de sous-espaces de $(\mathbb{R}, d_u)$ qui sont complets, non compacts et dont la réunion n'est pas complète.

6.4.18 Proposition : Dans un e.v.n., tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.

Preuve : Soit E un e.v.n. et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Pour la norme induite, F est un e.v.n. de dimension finie, il est donc complet (voir 6.4.10), et donc aussi fermé, d'après 6.4.15. □

6.4.19 Théorème (de Riesz) : Soit E un e.v.n.. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) E est de dimension finie,

(ii) la boule unité fermée $B'(0,1)$ de E est compacte,

(iii) E est localement compact (voir 5.3.1).

Preuve : (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte de 5.1.26.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : soit E un e.v.n. de dimension infinie ; il s'agit de prouver que sa boule $B'(0,1)$ n'est pas compacte. Il suffit pour cela d'exhiber une suite de points de $B'(0,1)$ qui ne possède aucune sous-suite convergente. Construisons cette suite par récurrence ; posons $x_0 = 0$, supposons définis les points $x_k \in B'(0,1)$ pour $k \leq n$ et construisons x_{n+1}. Soit F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par les points $x_0, \ldots, x_n$ déjà construits ; comme F_n est de dimension finie (contraire-

ment à E), il existe un point $a \in E - F_n$; donc $d(a, F_n) \neq 0$ (voir 3.1.6, puisque F_n est fermé d'après 6.4.10 et 6.4.15). Il existe donc un point $b \in F_n$ vérifiant $0 \neq ||a - b|| = d(a, b) < 2d(a, F_n)$ ($a \neq b$ car $a \notin F_n$ alors que $b \in F_n$; d'autre part, si un tel b n'existait pas, $2d(a, F_n)$ serait un minorant de tous les $d(a, x)$, avec $x \in F_n$, et l'on aurait $2d(a, F_n) \leq d(a, F_n)$!). Utilisant 1.3.18, on peut écrire : $||a - b|| = d(a, b) < 2d(a, F_n) = 2d(a - b, F_n)$, et donc aussi, en posant $x_{n+1} = (a - b)/||a - b||$, $1 = ||x_{n+1}|| = d(x_{n+1}, 0) < 2d(x_{n+1}, F_n)$. Par construction, $x_{n+1} \in B'(0, 1)$ et vérifie $d(x_{n+1}, x_k) \geq d(x_{n+1}, F_n) > 1/2$ pour tout $k \leq n$ (car $x_0, \ldots, x_n \in F_n$). Par récurrence, on construit ainsi une suite (x_n) de points de $B'(0, 1)$ vérifiant la propriété $(\star)$: $d(x_n, x_m) > 1/2$ pour tout $n \neq m$; les sous-suites de (x_n) possédant toutes cette même propriété $(\star)$, aucune ne converge !

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : résulte du fait, établi dans 4.3.3, que, dans un e.v.n., toutes les boules fermées sont homéomorphes.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) : par hypothèse, il existe un voisinage V compact de 0. Il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que $B'(0, \varepsilon) \subset B(0, 2\varepsilon) \subset V$. La boule $B'(0, \varepsilon)$ étant fermée dans le compact V, elle est elle-même compacte, ainsi que la boule $B'(0, 1)$ qui lui est homéomorphe. □

6.4.20 Remarque : Ainsi, les espaces $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, et les l^p, étant de dimension infinie, ne sont localement compact pour aucune des normes $|| \; ||_p$; on l'avait d'ailleurs implicitement prouvé pour $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), || \; ||_\infty)$ dans 5.1.28.

6.4.21 Exemple (*en exercice*) : Tout compact d'un e.v.n. de dimension infinie est d'intérieur vide.

6.4.22 Théorème (du point fixe) : Soit (E, d) un espace complet non vide et $f : E \longrightarrow E$ une application *contractante* (voir 1.6.1). Alors f possède un unique point fixe $\hat{x}$ (*i.e.* vérifiant $f(\hat{x}) = \hat{x}$). Ce point fixe possède la propriété suivante : pour tout point $x \in E$, la suite (x_n), définie par $x_0 = x$ et $x_n = f(x_{n-1})$ pour tout entier $n \geq 1$, converge vers le point fixe $\hat{x}$ de f.

Preuve : Supposons donc que f est k-lipschitzienne avec $k < 1$.

Unicité : Si f possédait deux points fixes différents a et b, on pourrait écrire $d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a, b)$, ce qui est absurde, puisque $k < 1$.

Existence : Fixons $x \in E$ et considérons la suite (x_n) définie dans l'énoncé ; montrons que cette suite est de Cauchy. On constate que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq kd(x_{n-1}, x_n) = kd(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \cdots \leq k^n d(x_0, x_1)$. Il en résulte que, si $m > n$, on a $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \leq (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{m-1})\, d(x_0, x_1) \leq k^n \sum_{p=0}^{\infty} k^p d(x_0, x_1) = k^n \dfrac{1}{1-k} d(x_0, x_1)$. Par suite, $\lim_{n,m \to +\infty} d(x_n, x_m) = 0$ (car $0 < k < 1$) ; la suite (x_n) est donc de Cauchy, et même convergente, puisque E est complet. Soit alors a sa limite ; on a donc $f(a) = \lim f(x_n)$ (puisque f est continue). Par suite $f(a) = \lim x_{n+1} = \lim x_n = a$, ainsi la limite a de la suite (x_n) est un point fixe de f. □

6.4.23 Remarques (*en exercices*) : On voit dans le théorème du point fixe que le point fixe $\hat{x}$ est approché, à partir d'un point quelconque $x_0 \in E$, par les "approximations successives" $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$ ...etc.

Il existe un théorème du point fixe "compact", où, si l'on renforce l'hypothèse

sur E, en le supposant compact, on peut alors affaiblir la condition sur f, en supposant seulement qu'elle vérifie la condition $(C_<)$ suivante : pour tout $x \neq y$, on a $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ (cette condition $(C_<)$ est en effet strictement plus faible que la condition "f est contractante", en voir un exemple dans 6.4.25). Dans le cas où E est un intervalle fermé et borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, muni de sa distance usuelle, alors il suffit que f soit continue pour qu'un tel point fixe existe (sans la condition $(C_<)$, il n'a aucune raison d'être unique) ; voir [1] 1.1.8 et [1] 3.6.17.

Le théorème du point fixe s'utilise pour prouver l'existence de solutions pour certaines équations différentielles. Il s'utilise aussi pour prouver l'existence d'un inverse à certaines applications. Si l'étudiant sait en gros calculer les inverses de fonctions bijectives à une variable réelle, il n'est pas facile de prouver l'existence de tels inverses en dimension supérieure (encore moins de les calculer explicitement quand ils existent) ; une utilisation très simple du théorème du point fixe nous permet de résoudre ce problème dans le cas où l'on dispose d'une application contractante (voir 6.4.24 et 6.4.25).

6.4.24 Proposition : Soit E un e.v.n. complet (*i.e.* un espace de Banach, voir la section VII.1) et $g : E \longrightarrow E$ une application contractante. Alors, l'application $f = id + g$ est bijective.

Preuve : Soit $a \in E$; il s'agit de montrer que l'équation $f(x) = a$ possède une solution unique dans E. Comme $f(x) = a \iff x + g(x) = a \iff x = a - g(x)$, résoudre le problème posé équivaut à montrer que l'application $h_a(x) = a - g(x)$ possède un unique point fixe dans E ; et pour cela, puisque E est complet, il suffit de prouver que l'application h_a est contractante (voir 6.4.22). Ceci est immédiat car g l'est, vu que l'on a $||h_a(x) - h_a(y)|| = ||g(x) - g(y)||$ pour tout $x, y \in E$. □

6.4.25 Exemples (*en exercices*) : On considère la distance usuelle.

L'application $x \mapsto x/2$ n'a pas de point fixe dans $]0, 1]$; et pourtant, elle est contractante sur cet intervalle (pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème du point fixe ici ?). Trouver un intervalle $[a, b]$ tel que l'application $f(x) = 1/x$ vérifie $f([a, b]) \subset [a, b]$, possède un point fixe sur $[a, b]$, et pourtant n'est pas contractante sur cet intervalle. L'application $g(x) = x + 1/x$ n'admet pas de point fixe sur $[1, +\infty[$, vérifie la condition $(C_<)$ de 6.4.23 mais n'est pas contractante sur cet intervalle (pourquoi ne peut-elle l'être ?).

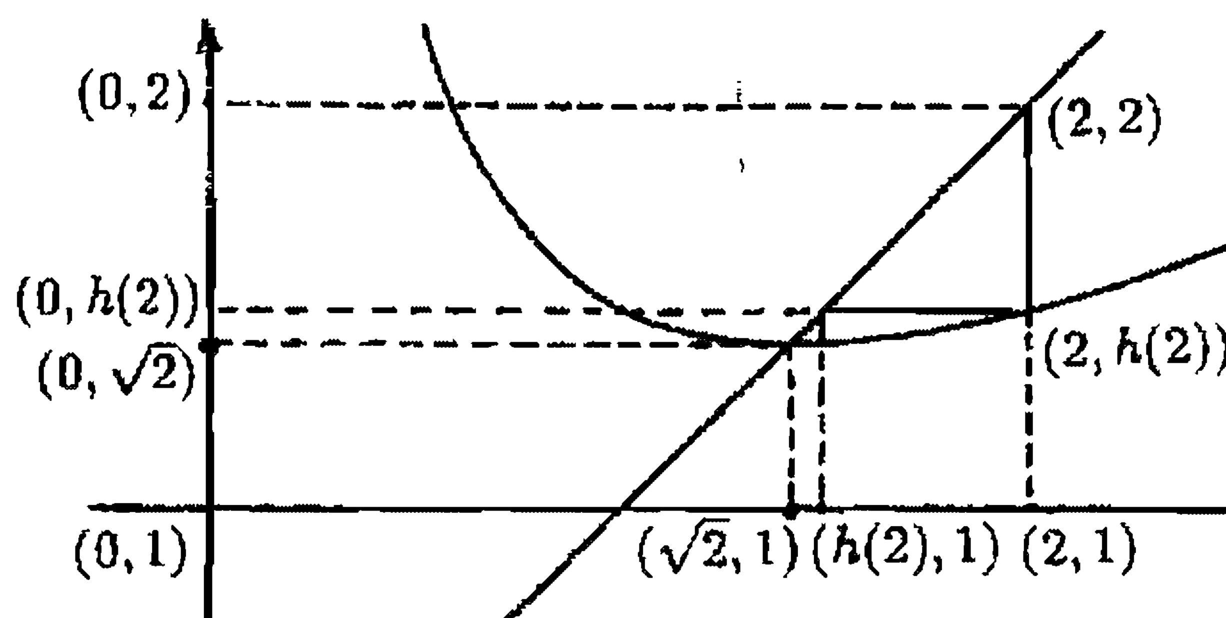


Figure 14 (6.4.25)

L'application $h(x) = x/2 + 1/x$ admet un unique point fixe dans $[1, 2]$; le calculer. En donner un calcul approché à l'aide d'une suite de rationnels (figure 14).

L'application $u(x) = -x$ admet un unique point fixe dans $[-1,1]$; ce point fixe n'est pas limite d'une suite (x_n) de $[-1,1]$ vérifiant $x_0 \neq 0$ et $x_n = u(x_{n-1})$; pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème du point fixe ?

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie (non réduit à $\{0\}$) d'un espace préhilbertien complet, la projection orthogonale p_F sur F (voir 1.4.8) est 1-lipschitzienne mais non contractante.

Les applications $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définies par $f_1(x) = x + (\sin x)/2$ et $f_2(x,y) = (x + (\sin y)/2, y + (\operatorname{Arctg} x)/3)$ sont bijectives.

6.4.26 Proposition : Soit E un ensemble et (F,d) un espace métrique complet. Alors l'espace $\mathcal{F}(E,F)$ est complet pour la quasi-distance $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in E} d(f(x),g(x))$ de la convergence uniforme (voir 2.1.17).

Preuve : Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $(\mathcal{F}(E,F), d_\infty)$. L'inégalité $d(f_n(x), f_m(x)) \leq d_\infty(f_n, f_m)$, vraie pour tout $x \in E$ et tout $n,m \in \mathbb{N}$, montre que, pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet (F,d), et donc convergente ; notons $f(x)$ sa limite. On a ainsi défini une application $f : E \longrightarrow F$ qui, par définition, est une limite simple de la suite (f_n) (voir 2.1.16) ; montrons que la suite (f_n) converge uniformément (*i.e.* pour la quasi-distance d_∞) vers cette application f. Soit donc $\varepsilon > 0$; comme la suite (f_n) est de Cauchy, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $d_\infty(f_n, f_m) \leq \varepsilon$ pour tout $n, m \geq N$, et donc $d(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$ pour tout $n, m \geq N$ et tout $x \in E$. Alors, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in E$ (fixés), en faisant tendre m vers l'infini, on obtient, grâce au fait que la suite $(f_m(x))$ converge vers $f(x)$ et à la continuité de la distance d (et donc de l'application partielle $d(f_n(x), -)$) : $d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$. Il en résulte que l'on a $d_\infty(f_n, f) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. □

6.4.27 Exemple : Pour tout ensemble E, l'espace $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ est complet pour la quasi-distance $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in E} |(f(x) - g(x)|$ de la convergence uniforme.

6.4.28 Corollaire : Soit E un ensemble (resp. un espace métrique) et (F,d) un espace métrique complet. Alors l'espace $\mathcal{F}_b(E,F)$ (resp. $C(E,F)$) est complet pour la distance (resp. la quasi-distance) de la convergence uniforme (voir 2.1.17 et 2.1.19).

Preuve : Ces espaces sont fermés dans $(\mathcal{F}(E,F), d_\infty)$: voir 3.1.25. □

6.4.29 Remarques : Pour la notion d'espace complet, on peut travailler avec les quasi-distances comme avec les distances, puisqu'à toute quasi-distance d on peut associer une distance δ qui possède les mêmes suites de Cauchy (*i.e.* telle que d et δ soient Cauchy-équivalentes) : par exemple $\delta = \inf(1,d)$ ou $\delta = d/(1+d)$ (voir 6.2.4 et 6.4.13).

Pour la norme de la convergence uniforme (voir 2.1.20), les espaces $\mathcal{F}_b([0,1],\mathbb{R})$ et $C([0,1],\mathbb{R})$ sont donc complets ($C([0,1],\mathbb{R})$ est un sous-espace de $\mathcal{F}_b([0,1],\mathbb{R})$, d'après 5.1.20 ; il est même fermé dans $\mathcal{F}_b([0,1],\mathbb{R})$, puisqu'il est fermé dans $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$, d'après 3.1.25). Ce sont donc deux exemples d'espaces de Banach (*i.e.* d'e.v.n. complets ; plus généralement, voir la section chapitre VII.1).

6.4.30 Exemples (*en exercices*) : Calculer explicitement le point fixe de l'application contractante $T : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ définie par $(T(f))(x) = \int_0^x t(1+f(t))dt$ (pour la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$).

L'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est complet pour la distance produit $\delta(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{2^n}$, où $d(x,y) = \inf(1, |x-y|)$ (voir 1.1.11).

5. COMPLETION METRIQUE

6.5.1 Théorème (de prolongement métrique) : Soit (E,d) un espace métrique, F une partie dense dans E et f une application uniformément continue de F, muni de la distance induite, dans un espace métrique complet (E',d'). On peut alors prolonger f de façon unique en une application uniformément continue sur E.

Preuve : *Unicité du prolongement uniformément continu* : Si g_1 et g_2 sont deux prolongements uniformément continus de f à E, ils sont donc continus et coïncident (avec f) sur F ; ils sont donc égaux sur $\overline{F} = E$, d'après 3.1.20.

Existence d'un prolongement uniformément continu : Soit $x \in E$ et (x_n) une suite de points de F qui d-converge vers x (une telle suite existe puisque F est dense dans (E,d)). La suite (x_n) étant de Cauchy dans (F,d), la suite $(f(x_n))$ est aussi de Cauchy dans (E',d') (puisque f est uniformément continue), et donc d'-convergente (puisque (E',d') est complet) ; l'idée est de poser $g(x) \overset{\star}{=} \lim f(x_n)$, encore faut-il s'assurer que la limite de la suite $(f(x_n))$ ne dépend pas du choix de la suite (x_n) de points de F qui d-converge vers x. Soit donc (x'_n) une autre suite de points de F qui d-converge aussi vers x dans E ; les suites (x_n) et (x'_n) sont donc d-Cauchy et d-équivalentes dans F, ce qui implique que leurs images $(f(x_n))$ et $(f(x'_n))$ sont d'-Cauchy et d'-équivalentes dans E', puisque $f : (F,d) \longrightarrow (E',d')$ est uniformément continue (Cauchy-continue suffirait ; voir 6.4.13). Il en résulte immédiatement que ces suites d'-convergent vers la même limite, puisque (E',d') est complet. L'égalité $\overset{\star}{=}$ définit donc sans ambiguïté une application $g : E \longrightarrow E'$ qui prolonge f à E (si $x \in F$, on a $g(x) = \lim f(x_n) = f(x)$, puisque f est continue).

Prouvons que g est uniformément continue sur E. Soit donc $\varepsilon > 0$; comme f est uniformément continue sur F, il existe un $\eta > 0$ tel que l'on ait $d'(f(a), f(b)) < \varepsilon/2$ pour tout $a, b \in F$ vérifiant $d(a,b) < 2\eta$. Considérons alors $x, y \in E$ vérifiant $d(x,y) < \eta$, et montrons que $d'(g(x), g(y)) < \varepsilon$. F étant dense dans (E,d), il existe deux suites (x_n), (y_n) dans F qui d-convergent respectivement vers x et y ; d'après ce qui précède, on a $d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, y_n) < 2\eta$. Mais comme $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow y$, on sait qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N$, on ait $d(x_n, x) < \eta/2$ et $d(y_n, y) < \eta/2$, donc aussi $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x,y) + d(y, y_n) < 2\eta$ et donc aussi $d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon/2$. Par un passage à la limite, on obtient, en utilisant la continuité de d', $d'(g(x), g(y)) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. □

6.5.2 Remarques (*en exercices*) : En particulier, si f est lipschitzienne (resp. une isométrie) sur F, il en est de même de son unique prolongement g à $\overline{F} = E$.

Le théorème 6.5.1 est faux pour une application seulement continue : plus précisément, on ne peut pas toujours prolonger une application continue sur F en une application continue sur $\overline{F} = E$ (par contre, si un tel prolongement existe, il

est unique).

6.5.3 Exemple (*en exercice*) : Pour la distance usuelle, toute fonction uniformément continue $]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée.

6.5.4 Définition : Soit E un espace métrique et $\widehat{E}$ un espace métrique complet ; s'il existe une isométrie $\varphi : E \longrightarrow \widehat{E}$ telle que $\varphi(E)$ soit dense dans $\widehat{E}$, on dit que $(\widehat{E}, \varphi)$ est un *complété métrique de E*.

6.5.5 Théorème (de complétion métrique) : Tout espace métrique possède un complété métrique ; ce complété métrique est unique à une isométrie bijective près.

Preuve : 1) *Unicité du complété métrique à une isométrie bijective près* : Supposons que $(\widehat{E}_1, \varphi_1)$ et $(\widehat{E}_2, \varphi_2)$ sont deux complétés métriques de E ; Les applications $\varphi_1 : E \longrightarrow \widehat{E}_1$ et $\varphi_2 : E \longrightarrow \widehat{E}_2$ sont donc deux isométries telles que $\varphi_1(E)$ et $\varphi_2(E)$ sont denses dans $\widehat{E}_1$ et $\widehat{E}_2$ respectivement. Une isométrie étant toujours injective, on sait que $\varphi_1 : E \longrightarrow \varphi_1(E)$ est une isométrie bijective. Considérons l'isométrie composée $h = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(E) \longrightarrow \widehat{E}_2$. Utilisant 6.5.1 et 6.5.2, on peut prolonger h en une isométrie $\hat{h} : \widehat{E}_1 \longrightarrow \widehat{E}_2$ (car $\varphi_1(E)$ est dense dans $\widehat{E}_1$, et $\widehat{E}_2$ est complet). Montrons que $\hat{h}$ est une bijection : elle est injective (car c'est une isométrie) ; prouvons qu'elle est surjective. Comme $\hat{h}(\widehat{E}_1)$ est un sous-espace complet de $\widehat{E}_2$ (car il est isométrique à $\widehat{E}_1$), c'est un fermé de $\widehat{E}_2$. Il reste donc à utiliser l'inclusion $\varphi_2(E) = h(\varphi_1(E)) \subset \hat{h}(\widehat{E}_1)$, et le fait que $\varphi_2(E)$ est dense dans $\widehat{E}_2$, pour obtenir que $\widehat{E}_2 = \overline{\varphi_2(E)} \subset \hat{h}(\widehat{E}_1)$ et donc que $\widehat{E}_2 = \hat{h}(\widehat{E}_1)$. Ainsi, $\hat{h} : \widehat{E}_1 \longrightarrow \widehat{E}_2$ est une isométrie bijective.

2) *Existence d'un complété métrique* : Soit (E, d) un espace métrique.

a) 1ère construction

On considère l'espace $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$, muni de la quasi-distance d_∞ (c'est un espace complet : voir 6.4.26), ainsi que l'application $\varphi : E \longrightarrow \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$, où $\varphi(x)$ est l'application $E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(\varphi(x))(y) = d(x, y)$. Montrons que $\varphi : (E, d) \longrightarrow (\mathcal{F}(E, \mathbb{R}), d_\infty)$ est une isométrie. Soit $x, x' \in E$; prouvons que l'on a $d_\infty(\varphi(x), \varphi(x')) = d(x, x')$. Or $d_\infty(\varphi(x), \varphi(x')) = \sup_{y \in E} |d(x, y) - d(x', y)| \leq d(x, x')$ (car $|d(x, y) - d(x', y)| \leq d(x, x')$ pour tout $y \in E$) ; et, comme pour $y = x'$, on obtient $|d(x, y) - d(x', y)| = d(x, x')$, on a aussi $d_\infty(\varphi(x), \varphi(x')) = \sup_{y \in E} |d(x, y) - d(x', y)| \geq d(x, x')$. D'où l'égalité cherchée.

Posons alors $\widehat{E} = \overline{\varphi(E)}$, l'adhérence de $\varphi(E)$ dans $(\mathcal{F}(E, \mathbb{R}), d_\infty)$. Remarquons d'abord que, pour tout $f \in \widehat{E}$, il existe une d-suite de Cauchy dans E dont l'image par φ d_∞-converge vers f dans $\widehat{E}$: en effet, soit $f \in \widehat{E}$, et $\varphi(x_n)$ une suite dans $\varphi(E)$ qui d_∞-converge vers f (cette suite existe, puisque $\varphi(E)$ est dense dans $\widehat{E}$; elle est de Cauchy, puisqu'elle converge dans $(\widehat{E}, d_\infty)$). Il reste à remarquer que la suite (x_n) est aussi de Cauchy dans (E, d) (l'application $\varphi : (E, d) \longrightarrow (\varphi(E), d_\infty)$ étant une isométrie bijective).

Il en résulte que la quasi-distance d_∞ est une distance sur $\widehat{E}$: en effet, soit $f, g \in \widehat{E}$, et (x_n), (y_n) des suites de Cauchy dans (E, d) telles que $f = \lim \varphi(x_n)$ et $g = \lim \varphi(y_n)$; comme ci-dessus. Vue la continuité des distances, on peut écrire $d_\infty(f, g) = \lim d_\infty(\varphi(x_n), \varphi(y_n)) = \lim d(x_n, y_n) < +\infty$ (d'après 6.4.13). Par suite, $(\widehat{E}, d_\infty)$ est un espace métrique. En fait, cet espace métrique est complet (c'est un

fermé dans un espace complet ; voir 6.4.14).

Tous les ingrédients sont donc en place pour que $((\widehat{E}, d_\infty), \varphi)$ soit un complété métrique de (E,d), où, ici, $\varphi : (E,d) \longrightarrow (\widehat{E}, d_\infty)$ est une restriction de l'application φ considérée ci-dessus (puisque, par construction de $\widehat{E}$, $\varphi(E)$ est dense dans $(\widehat{E}, d_\infty)$).

b) 2ème construction

Soit $\mathit{Cauch}(E,d)$ l'ensemble des suites de Cauchy dans (E,d) (on note $a = (x_n)$, $a' = (x'_n)$ ...de telles suites de Cauchy), sur lequel on considère la relation $\mathcal{R}$ suivante : $a \sim a'$ ssi $\lim d(x_n, x'_n) = 0$ (*i.e.* ssi les suites de Cauchy (x_n) et (x'_n) sont d-équivalentes ... voir 6.4.13). Cette relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence : elle est évidemment réflexive et symétrique ; maintenant, si $a \sim a'$ et $a' \sim a''$, *i.e.* si $\lim d(x_n, x'_n) = 0$ et $\lim d(x'_n, x''_n) = 0$, alors, par un passage à la limite dans l'inégalité $d(x_n, x''_n) \leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, x''_n)$, on obtient $\lim d(x_n, x''_n) = 0$, *i.e.* $a \sim a''$. La relation $\mathcal{R}$ est donc aussi transitive.

Notons $\widetilde{E} = (\mathit{Cauch}(E,d))/\mathcal{R}$ (voir 0.1.4) ; un élément de $\widetilde{E}$ est donc une classe d'équivalence de suites de Cauchy (on notera $\tilde{a}$, $\tilde{a'}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, ...etc, de telles classes, et (x_n), (x'_n), (y_n), (z_n), ...etc, des représentants dans chacune de ces classes). Posons $\tilde{d}(\tilde{a}, \tilde{b}) = \lim d(x_n, y_n)$ (cette limite existe, toujours d'après 6.4.13). Alors $\tilde{d}(\tilde{a}, \tilde{b})$ est indépendant du choix des suites dans les classes $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$: en effet, si l'on a $a \sim a'$ et $b \sim b'$ (*i.e.* $\tilde{a} = \tilde{a'}$ et $\tilde{b} = \tilde{b'}$), on a donc $\lim d(x_n, x'_n) = 0$ et $\lim d(y_n, y'_n) = 0$, et donc aussi $\tilde{d}(\tilde{a}, \tilde{b}) = \lim d(x_n, y_n) \leq \lim d(x_n, x'_n) + \lim d(x'_n, y'_n) + \lim d(y'_n, y_n) = \lim d(x'_n, y'_n) = \tilde{d}(\tilde{a'}, \tilde{b'})$; en échangeant les rôles de a, b avec a', b', on obtient aussi $\tilde{d}(\tilde{a'}, \tilde{b'}) \leq \tilde{d}(\tilde{a}, \tilde{b})$. D'où l'égalité $\tilde{d}(\tilde{a}, \tilde{b}) = \tilde{d}(\tilde{a'}, \tilde{b'}) = \lim d(x'_n, y'_n)$.

Montrons que l'application $\tilde{d}$ est une distance sur $\widetilde{E}$. C'est bien une application $\widetilde{E} \times \widetilde{E} \longrightarrow [0, +\infty[$. Pour l'axiome (D_1), on écrit $\tilde{d}(\tilde{a}, \tilde{b}) = 0 \iff \lim d(x_n, y_n) = 0 \iff a \sim b \iff \tilde{a} = \tilde{b}$. La symétrie est évidente ; pour l'axiome (D_3), on écrit $\tilde{d}(\tilde{a}, \tilde{c}) = \lim d(x_n, z_n) \leq \lim d(x_n, y_n) + \lim d(y_n, z_n) = \tilde{d}(\tilde{a}, \tilde{b}) + \tilde{d}(\tilde{b}, \tilde{c})$.

On considère alors l'application $\psi : E \longrightarrow \widetilde{E}$, où $\psi(x)$ est la classe d'équivalence de la suite constante sur x ; on a donc $\tilde{d}(\psi(x), \psi(y)) = \lim d(x,y) = d(x,y)$ pour tout $x, y \in E$, si bien que l'application $\psi : (E,d) \longrightarrow (\widetilde{E}, \tilde{d})$ est une isométrie.

Prouvons maintenant que $\psi(E)$ est une partie dense de l'espace $(\widetilde{E}, \tilde{d})$. Soit $\tilde{a} \in \widetilde{E}$ et (x_n) un représentant de $\tilde{a}$; montrons que la suite $(\psi(x_n))$ converge vers $\tilde{a}$ dans $(\widetilde{E}, \tilde{d})$. En effet, $\tilde{d}(\tilde{a}, \psi(x_n)) = \lim_m d(x_m, x_n)$; la suite (x_n) étant de Cauchy dans (E,d), on obtient $\lim_n \tilde{d}(\tilde{a}, \psi(x_n)) = \lim_{m,n} d(x_m, x_n) = 0$. Ceci prouve que $\overline{\psi(E)} = \widetilde{E}$ (puisque la suite $(\psi(x_n))$ est dans $\psi(E)$).

Montrons enfin que l'espace $(\widetilde{E}, \tilde{d})$ est complet. Soit $(\tilde{a}_n)$ une suite de Cauchy dans $(\widetilde{E}, \tilde{d})$; alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\tilde{a}_n$ est adhérent à $\psi(E)$ (car $\psi(E)$ est dense dans $\widetilde{E}$), de sorte qu'il existe un élément $x_n \in E$ tel que $\tilde{d}(\psi(x_n), \tilde{a}_n) < 1/2^n$. Montrons que la suite (x_n) ainsi définie est une suite de Cauchy dans (E,d). En effet, pour tout $p, q \geq n$, on a $d(x_p, x_q) = \tilde{d}(\psi(x_p), \psi(x_q)) \leq \tilde{d}(\psi(x_p), \tilde{a}_p) + \tilde{d}(\tilde{a}_p, \tilde{a}_q) + \tilde{d}(\tilde{a}_q, \psi(x_q)) < 2^{-p} + \tilde{d}(\tilde{a}_p, \tilde{a}_q) + 2^{-q} \leq 2 \times 2^{-n} + \delta(\mathcal{A}_n)$, où $\mathcal{A}_n = \{\tilde{a}_p \mid p \geq n\}$; par suite, si $B_n = \{x_p \mid p \geq n\}$, on a aussi $\delta(B_n) = \sup_{p,q \geq n} d(x_p, x_q) \leq 2^{1-n} + \delta(\mathcal{A}_n)$. Il en résulte que $\lim_n \delta(B_n) = 0$ (car la suite $(\tilde{a}_n)$ est de Cauchy dans $(\widetilde{E}, \tilde{d})$), ce qui prouve que la suite (x_n) est aussi de Cauchy dans (E,d) ;

voir 6.3.3. Désignons par $\tilde{a}$ sa classe dans $\widetilde{E}$. Utilisant les inégalités $\tilde{d}(\tilde{a}, \tilde{a}_n) \leq \tilde{d}(\tilde{a}, \psi(x_n)) + \tilde{d}(\psi(x_n), \tilde{a}_n)) < \tilde{d}(\tilde{a}, \psi(x_n)) + 2^{-n}$ et le fait, établi plus haut, que la suite $(\psi(x_n))$ converge vers $\tilde{a}$ dans $(\widetilde{E}, \tilde{d})$, on obtient $\lim \tilde{d}(\tilde{a}, \tilde{a}_n)) = 0$; ceci prouve que la suite $(\tilde{a}_n)$ donnée initialement converge vers $\tilde{a}$ dans $(\widetilde{E}, \tilde{d})$, et donc que l'espace $(\widetilde{E}, \tilde{d})$ est complet.

On vient de prouver que le couple $((\widetilde{E}, \tilde{d}), \psi)$ est aussi un complété métrique de (E, d).

Bien sûr, par unicité à isométrie près du complété métrique d'un espace métrique, les espaces métriques complets $(\widehat{E}, d_\infty)$ et $(\widetilde{E}, \tilde{d})$ sont isométriquement homéomorphes. □

6.5.6 Remarques : La première construction, bien qu'élégante, n'est certainement pas la plus intuitive. La seconde est la plus classique ; en effet, il est courant en mathématiques, de combler les "absences" ou les "trous" (ici les limites des suites de Cauchy de E non convergentes) en rajoutant à E des objets fictifs : dans le complété métrique $(\widetilde{E}, \tilde{d})$, la limite de la suite de Cauchy (x_n) de points de E, sera "matérialisée" par la classe de toutes les suites de Cauchy de points de E susceptibles d'avoir la même limite que (x_n), *i.e.* d-équivalentes à (x_n).

On a déjà remarqué que, pour la distance usuelle, $\mathbb{Q}$ n'est pas complet alors que $\mathbb{R}$ l'est (voir **6.4.2** et **6.4.11**) et que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$; par suite, $(\mathbb{R}, j_{\mathbb{Q}})$ est un complété métrique de $\mathbb{Q}$, où $j_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'injection canonique (qui est une isométrie pour la distance usuelle). En fait, la deuxième construction de 6.5.5 s'inspire d'une construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ (due à Méray, Heine et Cantor) : un réel y apparaissant justement comme une classe d'équivalence de suites de Cauchy de rationnels (pour la relation d'équivalence : $(x_n) \sim (x'_n)$ ssi $|x_n - x'_n| \longrightarrow 0$).

6.5.7 Exemples (*en exercices*) : Bien sûr, $([-\pi/2, \pi/2], d_u)$ est un complété métrique de $(]-\pi/2, \pi/2[, d_u)$; mais c'est aussi un complété métrique de $(\mathbb{R}, d)$! tout comme $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ d'ailleurs (où $d(x, y) = |\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y|$ et $\overline{d}$ est son prolongement à $\overline{\mathbb{R}}$) ; on avait remarqué dans 6.4.13 que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet ; quant à $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$, il est complet, puisque compact (voir 5.1.15 et 6.4.5).

$(\mathbb{N}', d')$ et (S', d_u) sont tous les deux des complétés métriques de $(\mathbb{N}, d_u)$ et (S, d_u) ; voir 2.2.9, 2.3.15 pour les définitions.

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \delta)$ est un complété métrique de $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \delta)$, où δ est la distance produit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $\delta(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} d(x_{nk}, y_{nk})/2^k$, où $d = \inf(1, d_u)$, $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$; voir 1.1.11. Ceci prouve que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ n'est pas fermé dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \delta)$.

Chapitre VII
LES ESPACES DE BANACH

1. ESPACES DE BANACH

7.1.1 Définition : On appelle *Espace de Banach* un e.v.n. complet.

7.1.2 Exemples (*en exercices*) : Tout e.v.n. de dimension finie (en particulier les $\mathbb{R}^n$; voir 6.4.10 et 6.4.11) est un espace de Banach; si F est un espace de Banach, les espaces fonctionnels $\mathcal{F}_b(E,F)$ et $\mathcal{C}_b(E,F)$ (où E est un ensemble dans le premier cas et un espace métrique dans le second, l'indice b signifiant à chaque fois qu'il s'agit d'applications bornées) sont des espaces Banach pour la norme de la convergence uniforme $||f||_\infty = \sup_{x\in E} ||f(x)||$ (voir 2.1.20 et 6.4.28); c'est le cas si $F = \mathbb{R}$. En particulier, $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ (voir 6.4.29); par contre, d'après 6.3.6 et 6.4.2, il ne l'est pas pour les normes $|| \ ||_1$ et $|| \ ||_2$.

$\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme $||f|| = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$ (voir 1.3.14), mais pas pour la norme $|| \ ||_\infty$ (on a vu dans 2.4.10 que ces deux normes ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$).

Les $(l^p, || \ ||_p)$ sont tous des espaces de Banach (pour tout $p \in [1,\infty]$). Il en est de même de $(l_0, || \ ||_\infty)$, où l_0 est le sous-espace de l^∞ formé des suites réelles qui convergent vers 0.

7.1.3 Proposition : Soit E et F deux e.v.n., le second étant de Banach ; alors l'espace $\mathcal{L}_c(E,F)$ (des applications linéaires continues : voir la section II.4) est un espace de Banach pour sa norme d'opérateur $||u|| = \sup_{||x||\leq 1} ||u(x)||$ (voir 2.4.3).

Preuve : Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}_c(E,F)$; alors, utilisant 2.4.3, on peut écrire $||u_n(x) - u_m(x)|| = ||(u_n - u_m)(x)|| \leq ||u_n - u_m|| \, ||x||$ pour tout $n,m \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$, si bien que, pour tout $x \in E$, la suite $(u_n(x))$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet F, donc convergente ; notons $u(x)$ sa limite. On a ainsi défini une application $u : E \longrightarrow F$, telle que la suite (u_n) converge simplement vers u (voir 2.1.16). Vérifions que $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$, puis que la suite (u_n) converge vers u dans $\mathcal{L}_c(E,F)$.

- u est linéaire : par un passage à la limite dans les égalités : $u_n(x+y) = u_n(x) + u_n(y)$ et $u_n(\lambda x) = \lambda u_n(x)$, on obtient $u(x+y) = u(x) + u(y)$ et $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ (on a utilisé la convergence simple de (u_n) vers u, et la continuité de l'addition et de la multiplication par un scalaire dans un e.v.n. ; voir 1.6.13).

- u est continue : soit $\varepsilon > 0$; comme la suite (u_n) est de Cauchy, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $||u_n - u_m|| \leq \varepsilon$ pour tout $n,m \geq N$, et donc $||u_n(x) - u_m(x)|| \leq \varepsilon$ pour tout $n,m \geq N$ et tout $x \in E$ vérifiant $||x|| \leq 1$. Alors, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in E$ vérifiant $||x|| \leq 1$ (fixés), en faisant tendre m vers l'infini, on obtient, grâce au fait que la suite $(u_m(x))$ converge vers $u(x)$ et à la continuité de la norme (voir 1.6.8) : $||u_n(x) - u(x)|| \leq \varepsilon$; par suite,

pour tout $n \geq N$, on a $||u_n - u|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||u_n(x) - u(x)|| \leq \varepsilon$, et donc aussi $||u|| \leq ||u_n|| + ||u_n - u|| \leq ||u_n|| + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $||u|| \leq ||u_n||$ et donc que u est continue, puisque u_n l'est (voir 2.4.3).

- En fait, on a montré en passant que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait l'inégalité $||u_n - u|| \leq \varepsilon$, ce qui signifie que $||u_n - u|| \longrightarrow 0$, *i.e.* que la suite de Cauchy (u_n) converge vers u dans $\mathcal{L}_c(E, F)$. □

7.1.4 Remarque (*en exercice*) : On peut aussi prouver 7.1.3 en utilisant le fait que $(\mathcal{F}_b(\overline{B'(0,1), F}), || \, ||_\infty)$ est complet lorsque F l'est (voir 6.4.28), et le fait (voir 2.4.4) que la norme d'opérateur $||u||$ sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ est en fait une norme "image réciproque" $||j(u)||_\infty$, où $j : \mathcal{L}_c(E, F) \longrightarrow \mathcal{F}_b(B'(0,1), F)$ est l'application linéaire injective qui, à tout u, associe sa restriction à $B'(0,1)$.

7.1.5 Corollaire : Pour tout e.v.n. E, l'espace $\mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires continues sur E est un espace de Banach.

Preuve : On utilise 7.1.3, puisque $\mathbb{R}$ est complet. □

7.1.6 Définition : L'espace $\mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ s'appelle le *dual topologique* de E (alors que le dual de E est l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E) et se note E^*.

7.1.7 Théorème (de l'application ouverte) : Toute application linéaire continue et surjective entre espaces de Banach est ouverte.

Preuve : Voir [2] et [3]. □

7.1.8 Théorème (de Banach) : Toute bijection linéaire continue entre espaces de Banach est un homéomorphisme.

Preuve : Découle directement de 4.2.11 et 7.1.7. □

7.1.9 Théorème (du graphe fermé) : Soit E et F deux espaces de Banach et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire ; alors u est continue ssi son graphe $Gr(u) = \{(x,y) \in E \times F \mid y = u(x)\}$ est fermé dans $E \times F$ (pour les normes produit).

Preuve : Supposons u continue ; le fait que $Gr(u)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E \times F$ résulte du fait qu'il s'écrit $Gr(u) = \overset{-1}{v}(\{0\}) = Ker\, v$ où $v : E \times F \longrightarrow F : (x,y) \mapsto y - u(x)$ (l'addition d'un e.v.n. étant continue). Inversement, si $Gr(u)$ est un fermé de $E \times F$, il est complet (car $E \times F$ l'est ; voir 6.4.12 et 6.4.14) ; par suite, la restriction $p : Gr(u) \longrightarrow E : (x, u(x)) \mapsto x$, de la projection canonique $\pi_1 : E \times F \longrightarrow E$, est bijective linéaire et continue, donc un homéomorphisme, d'après 7.1.8. Il en résulte que son inverse est continu, et donc u aussi, comme composante d'une application continue. □

2. COMPLETION NORMEE

7.2.1 Théorème (de prolongement normé) : Soit E un e.v.n., F un sous-espace dense de E et $u : F \longrightarrow E'$ une application linéaire continue, où E' est un espace de Banach. Alors u se prolonge de manière unique en une application linéaire continue $v : E \longrightarrow E'$ vérifiant $||v|| = ||u||$.

<u>Preuve</u> : L'application linéaire u étant en fait uniformément continue (et même lipschitzienne ; voir 2.4.1), on applique tout simplement le théorème de prolongement métrique 6.5.1 ; u se prolonge donc en une unique application uniformément continue $v : E \longrightarrow E'$ qui est ici linéaire : si $x, y \in E$ s'écrivent $x = \lim x_n$ et $y = \lim y_n$ avec $x_n, y_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, en utilisant la linéairité de u, la continuité de l'addition et de v, et le fait que $v = u$ sur F, ce dernier étant un sous-espace vectoriel de E, $v(x+y) = \lim v(x_n + y_n) = \lim u(x_n + y_n) = \lim u(x_n) + \lim u(y_n) = v(x) + v(y)$. On procède de même pour prouver que $v(\lambda x) = \lambda v(x)$.

Bien sûr, comme $F \subset E$, on a $||v|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||v(x)|| \geq \sup_{||a|| \leq 1} ||v(a)|| = \sup_{||a|| \leq 1} ||u(a)|| = ||u||$ (où les x sont dans E et les a dans F). Pour l'inégalité inverse, fixons $x \in E$ et soit (a_n) une suite de F qui converge vers x dans E. Si $||x|| < 1$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $||a_n - x|| \leq 1 - ||x||$ pour tout $n \geq N$; il en résulte que l'on a $||a_n|| \leq ||a_n - x|| + ||x|| \leq 1$, et donc aussi $||u(a_n)|| \leq \sup_{||a|| \leq 1} ||u(a)|| = ||u||$ pour tout $n \geq N$. Par un passage à la limite (en utilisant la continuité de v et de la norme), on obtient $||v(x)|| \leq ||u||$. Si $||x|| = 1$, soit (x_n) une suite de points de E qui converge vers x dans E et qui vérifie $||x_n|| < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ça existe : par exemple $x_n = (1 - 1/n)x$). D'après ce qui précède, on a $||v(x_n)|| \leq ||u||$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc encore, par un passage à la limite, $||v(x)|| \leq ||u||$. Finalement, on obtient $||v|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||v(x)|| \leq ||u||$. D'où l'égalité $||u|| = ||v||$. □

7.2.2 Corollaire : Sous les hypothèses et les notations du théorème 7.2.1, on considère l'application $\alpha : \mathcal{L}_c(E, E') \longrightarrow \mathcal{L}_c(F, E') : v \mapsto v\big|_F$ (où $v\big|_F$ est la restriction de v à F). Alors α est un isomorphisme isométrique.

<u>Preuve</u> : C'est une conséquence immédiate de 7.2.1, $\alpha^{-1}(u)$ étant l'unique prolongement linéaire de u à E ; le fait que α soit un isomorphisme va de soi. □

7.2.3 Théorème (de prolongement de Hahn-Banach) Soit E un e.v.n., F un sous-espace vectoriel de E et $u : F \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue sur F. Alors u se prolonge en une forme linéaire continue $v : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $||v|| = ||u||$.

<u>Preuve</u> : Voir [2]. □

7.2.4 Théorème (de complétion normée) : Soit E un e.v.n. ; alors il existe un espace de Banach $\widehat{E}$ et une isométrie linéaire $\varphi : E \longrightarrow \widehat{E}$ telle que $\varphi(E)$ soit dense dans $\widehat{E}$ (on dit que $(\widehat{E}, \varphi)$ est un *complété normé de* E). Ce complété normé de E est unique à isomorphisme isométrique près.

<u>Preuve</u> : Pour l'unicité à isomorphisme isométrique près d'un complété normé, on procède comme dans 6.5.5, la linéarité de l'isométrie bijective entre deux complétés normés résultant du théorème de prolongement normé 7.2.1.

Soit E un e.v.n. et E^{**} son bidual topologique (*i.e.* le dual topologique de son dual topologique, que l'on devrait plutôt noter $(E^*)^*$: voir 7.1.6), que l'on munit de sa norme d'opérateur. On considère alors l'application $\varphi : E \longrightarrow E^{**} : x \mapsto \hat{x}$, où $\hat{x}$ est la forme linéaire sur E^* définie par $\hat{x}(u) = u(x)$. D'abord, cette application est bien définie, *i.e.* $\hat{x} : E^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire et continue pour tout $x \in E$; sa linéarité étant évidente, on doit juste vérifier que $||\hat{x}|| < +\infty$ pour tout $x \in E$. Fixons donc un $x \in E$; alors, pour tout $u \in E^*$, on a $|\hat{x}(u)| = |u(x)| \leq ||u|| \, ||x||$ (voir 2.4.3), et donc $|\hat{x}(u)| \leq ||x||$ pour tout $u \in E^*$ vérifiant $||u|| \leq 1$; par suite, $||\hat{x}|| = \sup_{||u|| \leq 1} |\hat{x}(u)| \leq ||x||$, ce qui prouve que $\hat{x}$ est continue. φ est

manifestement linéaire. Pour prouver que φ est une isométrie (ici, qu'elle conserve la norme), il suffit, d'après ce qui précède, de prouver l'inégalité $||x|| \leq ||\hat{x}||$ pour tout $x \in E$. C'est clairement vrai pour $x = 0$. Soit alors $x \in E - \{0\}$ fixé et posons $D = \mathbb{R}x$; c'est un sous-espace vectoriel de E (c'est même une droite vectorielle de E). On considère la forme linéaire u sur D définie par $u(x) = ||x||$; elle est continue (car elle est définie sur une droite ; voir 5.1.29) et, plus précisément, pour tout $y = \lambda x \in D$, on a $|u(y)| = |\lambda|\,|u(x)| = |\lambda|\,||x|| = ||\lambda x|| = ||y||$, de sorte que $||u|| = \sup_{||y||=1} |u(y)| = 1$. On utilise le théorème de Hahn-Banach 7.2.3 pour en déduire l'existence d'un prolongement $v \in E^*$ vérifiant $||v|| = ||u|| = 1$. On a alors $|\hat{x}(v)| = |v(x)| = |u(x)| = ||x||$ (la deuxième égalité résultant du fait que $v = u$ sur D), si bien que $||\hat{x}|| = \sup_{||w||=1} |\hat{x}(w)| \geq |\hat{x}(v)| = ||x||$ (l'inégalité résultant du fait que $||v|| = 1$). On a donc bien prouvé que $\varphi : E \longrightarrow E^{**} : x \mapsto \hat{x}$ est une isométrie. Posons $\widehat{E} = \overline{\varphi(E)}$, l'adhérence de $\varphi(E)$ dans E^{**}, que l'on munit de la norme d'opérateur induite, et considérons la restriction $\varphi : E \longrightarrow \widehat{E}$; on obtient ainsi un complété normé de E, puisque cette restriction est une isométrie linéaire, et, par définition de $\widehat{E}$, $\varphi(E)$ est dense dans $\widehat{E}$, ce dernier étant un espace de Banach : c'est un espace vectoriel (c'est l'adhérence d'un sous-espace vectoriel de E^{**} (voir 3.1.2)) qui est complet, puisque fermé dans l'espace de Banach E^{**} (voir 6.4.14 et 7.1.5). □

7.2.5 Exemples (*en exercices*) : Pour la norme $||\ ||_\infty$ de la convergence uniforme, l'espace $C([0,1],\mathbb{R})$ est un complété normé de ses sous-espaces $C^1([0,1],\mathbb{R})$ et F, où F est formé des fonctions polynômes sur $[0,1]$ à coefficients réels (voir 6.1.9 et 7.1.2).

Pour tout $p \in [1, \infty[$, l^p est un complété normé de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ pour la norme $||\ ||_p$. Pour la norme $||\ ||_\infty$, c'est l_0 (voir 7.1.2) qui est un complété normé de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.

7.2.6 Remarque : On rappelle que $C([0,1],\mathbb{R})$ n'est pas complet pour les normes $||\ ||_p$, où $p \in [1, \infty[$ (voir 7.1.2). Cependant, chacune de ces normes $||\ ||_p$ se prolonge à l'espace $L^p([0,1])$ des classes de fonctions sur $[0,1]$ qui sont p-intégrables au sens de Lebesgue ; et cet espace $L^p([0,1])$ est un complété normé de $C([0,1],\mathbb{R})$ pour la norme $||\ ||_p$ ... mais ceci nous amène aux portes de la théorie de l'intégration (au sens de Lebesgue) qui sort du cadre de notre étude.

3. SERIES DANS UN ESPACE DE BANACH

7.3.1 Définitions : Soit E un e.v.n. et (x_n) une suite dans E ; posons $s_n = x_0 + \cdots + x_n$. On appelle *série de terme général* x_n, ce que l'on note $\sum x_n$, la suite (s_n) (s_n étant la *somme partielle d'ordre* n de la série $\sum x_n$). Il est alors naturel de dire que la *série* $\sum x_n$ *converge dans* E si la suite (s_n) converge dans E ; dans ce cas, la limite de la suite (s_n) est un élément de E que l'on appelle la *somme de la série* $\sum x_n$, que l'on note $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim s_n$.

On dit que la série $\sum x_n$ *converge normalement dans* E si la série numérique $\sum ||x_n||$ converge dans $\mathbb{R}$.

7.3.2 Remarques (*en exercice*) : Dans le cas où $E = \mathbb{R}$ et où l'on a $x_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme de la série $\sum x_n$ existe toujours dans $[0, +\infty]$ (car la suite (s_n) des sommes partielles est alors croissante ; voir 2.1.7), et l'on a l'équivalence :

la série $\sum x_n$ converge dans $\mathbb{R} \iff \sum_{n=0}^{\infty} x_n < +\infty$. En fait, dans le cas où les x_n sont tous positifs, on a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sup_{J\ fini \subset \mathbb{N}} \sum_{i \in J} x_i$.

Dans un e.v.n., une série peut être normalement convergente sans être convergente : considérer par exemple l'espace des fonctions polynomiales à coefficients réels, muni de la norme $\|P\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$ définie dans 2.4.9 et la série $\sum P_n$ où $P_n(x) = x^n/n!$; on retrouve ainsi (grâce à 7.3.3) que cet e.v.n. n'est pas complet (voir 7.2.5).

7.3.3 Proposition : Un e.v.n. est un espace de Banach ssi toutes ses séries normalement convergentes sont convergentes. Dans ce cas, pour toute série normalement convergente, on a l'inégalité $\|\sum_{n=0}^{\infty} x_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$.

Preuve : Soit E un e.v.n..

Supposons que E est un espace de Banach et soit $\sum x_n$ une série normalement convergente dans E ; montrons qu'elle converge. En fait, comme E est complet, il suffit de prouver que la suite (s_n) de ses sommes partielles est de Cauchy. Or, pour $m < n$, on a $\|s_n - s_m\| = \|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} \|x_k\|$; le dernier terme tendant vers 0 (c'est le reste d'ordre n d'une série numérique convergente), on en déduit que $\|s_n - s_m\| \longrightarrow 0$ quand $n, m \longrightarrow +\infty$.

Inversement, supposons que, dans E, toute série normalement convergente est convergente. On doit prouver que toute suite de Cauchy dans E converge dans E ; soit donc (a_n) une suite de Cauchy dans E ; le fait qu'elle converge résultera de l'existence d'une sous-suite convergente (voir 6.3.7). Procédons par récurrence pour construire une telle sous-suite. Supposons $a_{n_0}, \ldots, a_{n_{k-1}}$ déjà construits (avec $n_0 = 0$; on a donc $n_0 < n_1 < \cdots < n_{k-1}$) et construisons a_{n_k} et $a_{n_{k+1}}$ simultanément de la manière suivante : sachant que la suite $(a_n)_{n > n_{k-1}}$ est encore une suite de Cauchy (voir 6.3.4), on sait qu'il existe un entier $N > n_{k-1}$ tel que l'on ait $\|a_m - a_n\| < 1/2^k$ pour tout n, m vérifiant $N \leq n < m$; on choisit donc n_k et n_{k+1} vérifiant $N \leq n_k < n_{k+1}$, de sorte que $\|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}\| < 1/2^k$. On dispose ainsi d'une sous-suite (a_{n_k}) de la suite (a_n) ; il reste à prouver que cette sous-suite converge. Posons $x_k = a_{n_{k+1}} - a_{n_k}$; c'est le terme général d'une série normalement convergente d'après ce qui précède, donc convergente d'après l'hypothèse faite sur E ici. Ainsi la suite de terme général $s_k = x_0 + \cdots + x_k$ converge, disons vers un $l \in E$; comme $s_k = a_{n_{k+1}} - a_{n_0}$, on en déduit que la suite (a_{n_k}) converge et que sa limite est $l + a_{n_0}$.

Enfin, l'inégalité proposée dans l'énoncé s'obtient par un passage à la limite (en k) dans l'inégalité triangulaire $\|\sum_{n=0}^{k} x_n\| \leq \sum_{n=0}^{k} \|x_n\|$, en utilisant la continuité de la norme. □

7.3.4 Remarque : Dans un espace de Banach, toute série normalement convergente est *commutativement convergente*, *i.e.*, en opérant une permutation sur l'ordre de ses termes (*i.e.* sur $\mathbb{N}$), elle reste normalement convergente et conserve sa somme.

7.3.5 Remarque : Dans la section VIII.5 nous aurons affaire à des séries indexées par $\mathbb{Z}$; nous les ramenons à des séries indexées par $\mathbb{N}$ à l'aide de la bijection $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $\varphi(2n) = n$ et $\varphi(2n+1) = -(n+1)$.

7.3.6 Définition : Soit E un e.v.n. et $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille dans E indexée par $\mathbb{Z}$ (voir 0.1.3) ; on notera $(\widetilde{x}_n)$ la suite dans E définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $\widetilde{x}_n = x_{\varphi(n)}$; la suite $(\widetilde{x}_n)$ est donc la suite $(x_0, x_{-1}, x_1, x_{-2}, x_2, \ldots, x_{-n}, x_n, \ldots)$.

La *série de terme général* x_n, que l'on notera $\sum_{\mathbb{Z}} x_n$, sera par définition la série $\sum \widetilde{x}_n$. On dira donc que la *série* $\sum_{\mathbb{Z}} x_n$ *converge dans* E lorsque la série $\sum \widetilde{x}_n$ converge dans E ; dans ce cas, la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{x}_n$ de la série $\sum \widetilde{x}_n$ sera appelée la somme de la série $\sum_{\mathbb{Z}} x_n$ et sera notée $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$.

7.3.7 Remarques (*en exercice*) : Avec les notations de 7.3.6, soit $(\widetilde{s}_n)$ la suite des sommes partielles de la série $\sum \widetilde{x}_n$. Alors, si la série $\sum_{\mathbb{Z}} x_n$ converge dans E, sa somme s'écrit, par définition, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{x}_n = \lim \widetilde{s}_n = \lim \widetilde{s}_{2n} = \lim \sum_{k=-n}^{n} x_k$.

Remarquons que, pour une série indexée par $\mathbb{Z}$, on a l'implication :
$\sum_{\mathbb{Z}} x_n$ converge $\Longrightarrow x_n \to 0$ quand $|n| \to +\infty$: en effet, par définition, $\sum_{\mathbb{Z}} x_n$ converge implique que $\widetilde{x}_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ et donc que $x_n = \widetilde{x}_{2n} \to 0$ et $x_{-n} = \widetilde{x}_{2n-1} \to 0$ quand $n \to +\infty$ (la réciproque est fausse).

Dans le cas où $E = \mathbb{R}$ et où l'on a $x_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la somme de la série $\sum_{\mathbb{Z}} x_n$ existe toujours dans $[0, +\infty]$, et l'on a l'équivalence :
$\sum_{\mathbb{Z}} x_n$ converge dans $\mathbb{R} \Longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n < +\infty$ (voir 7.3.2).

7.3.8 Définition : On désigne par $l^2(\mathbb{Z})$ l'espace vectoriel des familles $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de réels dont la série $\sum_{\mathbb{Z}} a_n^2$ converge dans $\mathbb{R}$, *i.e.* (voir 7.3.7) pour lesquelles on a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2 < +\infty$. L'espace $l^2(\mathbb{Z})$ est un espace de Banach pour la norme $||a||_2 = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2}$: cela résulte du fait que l'application $\widetilde{\varphi} : l^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow l^2$: $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est un isomorphisme qui transporte donc, par "image réciproque" toute la structure de l^2 sur $l^2(\mathbb{Z})$; en particulier, $l^2(\mathbb{Z})$ est un espace de Hilbert (voir 8.1.1 et 8.1.2) pour le produit scalaire $< a, b >= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_n$ (voir 1.3.4 et 1.4.4).

7.3.9 Remarques (*en exercice*) : Attention, la définition proposée dans 7.3.6 de la notion de série convergente indexée par $\mathbb{Z}$ (qui résulte de notre choix de définition de série indexée par $\mathbb{Z}$, adapté à l'utilisation que l'on en fait dans la section VIII.5) n'implique pas que les séries $\sum_{n\geq 0} x_n$ et $\sum_{n\leq 0} x_n$ convergent (donner un exemple).

En fait, on peut, plus généralement, donner un sens à l'expression "$\sum_I x_i$ converge" pour une famille $(x_i)_{i\in I}$ indexée par un ensemble I quelconque ; on parle alors de *famille sommable* $(x_i)_{i\in I}$ au lieu de série convergente (voir [3]). La notion de famille sommable a la particularité de ne faire aucune référence à un ordre sur l'ensemble d'indices I de la famille ; la commutativité est donc dans la définition même de famille sommable (qui est donc en fait *commutativement sommable*). Les séries convergentes, indexées par $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, ne sont pas toujours des familles sommables, mais celles qui interviennent dans les sections VIII.4 et VIII.5, le sont. Ici encore, on définit l'espace hilbertien $l^2(I)$ des familles $(a_i)_{i\in I}$ de réels vérifiant $\sum_{i\in I} a_i^2 < +\infty$, pour le produit scalaire $< a, b >= \sum_{i\in I} a_i b_i$.

4. SERIES DANS UNE ALGEBRE DE BANACH

7.4.1 Définitions : On appelle *algèbre normée* un e.v.n. $\mathcal{A}$ muni d'une multiplication associative (pas forcément commutative), distributive par rapport à l'addition (c'est donc une algèbre au sens de 0.3.5) et vérifiant $||ab|| \leq ||a|| \, ||b||$ pour tout $a, b \in \mathcal{A}$. On supposera dans ce qui suit que cette multiplication possède une unité, notée 1, qui vérifie $||1|| = 1$ (voir 7.4.3).

On note $\mathcal{A}^*$ le sous-groupe de $\mathcal{A}$ formé de ses éléments inversibles pour la multiplication (*i.e.* les éléments $a \in \mathcal{A}$ pour lesquels il existe un $b \in \mathcal{A}$ vérifiant $ab = ba = 1$; ce b est unique pour chaque $a \in \mathcal{A}$ et est noté a^{-1}). Attention, $\mathcal{A}^*$ n'est pas un dual topologique, contrairement à E^* (il ne s'agit pas de la même "étoile" ; voir les sections VII.1 et VII.2).

Une *algèbre de Banach* est une algèbre normée complète.

Un *homomorphisme* (resp. *isomorphisme*) *d'algèbres normées* est un homomorphisme d'algèbres (voir 0.3.5) entre algèbres normées qui est continu (resp. un homéomorphisme).

Un *homomorphisme* (resp. *isomorphisme*) *d'algèbres de Banach* est un homomorphisme (resp. isomorphisme) d'algèbres normées entre algèbres de Banach (d'après 7.1.8, pour qu'un homomorphisme d'algèbres de Banach soit un isomorphisme, il suffit qu'il soit bijectif).

Une *sous-algèbre normée* (resp. *de Banach*) d'une algèbre normée (resp. de Banach) $\mathcal{A}$ est une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ qui est une algèbre normée (resp. de Banach) et telle l'injection canonique $j : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ soit un homomorphisme d'algèbres normées.

7.4.2 Proposition : La multiplication $m : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} : (a,b) \mapsto ab$ d'une algèbre normée $\mathcal{A}$ est une application continue.

Preuve : La même que pour la multiplication externe $m : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ d'un e.v.n. E (voir 2.3.19). □

7.4.3 Exemples (*en exercices*) : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des algèbres de banach pour leurs opérations naturelles et leur norme usuelle (respectivement, la valeur absolue et le module qui vérifient chacune $|xy| = |x|\,|y|$) ; les sous-groupes de leurs éléments inversibles pour leur multiplication sont bien connus pour être respectivement $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ et $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

Soit E un e.v.n. ; notons $\mathcal{L}_c(E)$ l'espace $\mathcal{L}_c(E,E)$ des endomorphismes continus sur E. On sait que $\mathcal{L}_c(E)$ est un e.v.n. pour sa norme d'opérateur (voir 2.4.3). On a vu dans 7.1.3 que $\mathcal{L}_c(E)$ est un espace de Banach lorsque E en est un ; $\mathcal{L}_c(E)$ est même alors une algèbre de Banach dont la multiplication est la composition des endomorphismes (qui vérifie $||u \circ v|| \leq ||u||\,||v||$: voir 2.4.4), dont l'unité est $id : E \longrightarrow E$ (qui vérifie $||id|| = 1$ si $E \neq \{0\}$) et dont le sous-groupe des éléments inversibles, noté ici $Isom(E)$, est formé des bijections de $\mathcal{L}_c(E)$ (qui sont des homéomorphismes, d'après 7.1.8).

En dimension finie, on a $\mathcal{L}_c(E) = \mathcal{L}(E,E)$ (voir 5.1.29) ; plus précisément, si $dim\, E = n$, on identifie E à $\mathbb{R}^n$ (moyennant le choix d'une base sur E ; voir 1.3.5 et 1.6.12) et donc $\mathcal{L}(E,E)$ à $M_n(\mathbb{R})$, l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; $Isom(E)$ s'identifie alors à $GL_n(\mathbb{R})$, le sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices inversibles. Si l'on choisit sur $M_n(\mathbb{R})$ une norme vérifiant $||AB|| \leq ||A||\,||B||$ (ça existe, par exemple les normes sur $M_n(\mathbb{R})$ correspondant aux normes d'opérateurs sur $\mathcal{L}_c(E)$, qui peuvent différer selon la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$; voir 1.3.6, 1.3.9 et 2.4.9), alors $M_n(\mathbb{R})$ est une algèbre de Banach.

Dans une algèbre normée quelconque, on a toujours $1 \leq ||1||$ et $||a||^{-1} \leq ||a^{-1}||$ pour tout a inversible. Donner un exemple d'algèbre normée où l'on a $||1|| \neq 1$ et un autre dans lequel il existe un a inversible vérifiant $||a||^{-1} \neq ||a^{-1}||$.

7.4.4 Proposition : Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $a \in \mathcal{A}$ vérifiant $||a|| < 1$; alors la série $\sum a^n$ est normalement convergente (où $a^0 = 1$) ; de plus $1 - a \in \mathcal{A}^*$

et l'on a $(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$.

Preuve : Comme la série géométrique $\sum ||a||^n$ converge (on a supposé $||a|| < 1$) et $||a^n|| \leq ||a||^n$, la série $\sum a^n$ converge normalement ; c'est donc une série convergente : on a $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \lim s_n$ où (s_n) est la suite des sommes partielles de la série $\sum a^n$. Posons $l = \lim s_n$; il reste donc à prouver que $l = (1-a)^{-1}$. Or $(1-a)s_n = (1-a)(1+a+\cdots+a^n) = 1-a^{n+1}$, de sorte que $(1-a)l = (1-a)(\lim s_n) = \lim((1-a)s_n) = \lim(1-a^{n+1}) = 1-\lim(a^{n+1}) = 1$, la dernière égalité résultant du fait que $||a^{n+1}|| \leq ||a||^{n+1} \longrightarrow 0$, puisque $||a|| < 1$. Un calcul similaire donne aussi $s_n(1-a) = 1-a^{n+1}$ puis $l(1-a) = 1$; ainsi, on a bien $l = (1-a)^{-1}$. □

7.4.5 Remarque : On peut traduire 7.4.4 ainsi : si $a \in \mathcal{A}$ vérifie $||1-a|| < 1$, alors $a \in \mathcal{A}^*$ (en d'autres termes, on a l'inclusion $B(1,1) \subset \mathcal{A}^*$, où $B(1,1) = \{a \in \mathcal{A} \mid ||1-a|| < 1\}$) ; et $a^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-a)^n$.

7.4.6 Corollaire : Dans une algèbre de Banach $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*$ est un ouvert.

Preuve : Montrons que $\mathcal{A}^*$ est voisinage de chacun de ses points. Soit $a \in \mathcal{A}^*$; prouvons que la boule ouverte $B(a, 1/||a^{-1}||)$ de $\mathcal{A}$ est incluse dans $\mathcal{A}^*$. Soit donc $h \in \mathcal{A}$ vérifiant $||h|| < 1/||a^{-1}||$, *i.e.* tel que $a+h \in B(a, 1/||a^{-1}||)$; prouvons que $a+h \in \mathcal{A}^*$: comme $||a^{-1}h|| \leq ||a^{-1}||\,||h|| < 1$, on a $1+a^{-1}h \in \mathcal{A}^*$ d'après 7.4.4 ; il reste alors à remarquer que $a+h = a(1+a^{-1}h) \in \mathcal{A}^*$. □

7.4.7 Proposition : Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $a \in \mathcal{A}$ vérifiant $||a|| < R$, où R est le rayon de convergence d'une série entière $\sum \lambda_n x^n$ à coefficients réels ; alors la série $\sum \lambda_n a^n$ converge dans $\mathcal{A}$ et l'application $\sigma_R : B(0,R) \longrightarrow \mathcal{A} : a \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a^n$ est continue (on pose $B(0,R) = \mathcal{A}$ lorsque $R = \infty$).

Preuve : La série $\sum \lambda_n a^n$ converge dans l'algèbre de Banach $\mathcal{A}$ puisqu'elle converge normalement (car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $||\lambda_n a^n|| \leq |\lambda_n|\,||a||^n$, et la série $\sum \lambda_n ||a||^n$ converge absolument puisque $||a|| < R$).

Fixons maintenant un réel r vérifiant $0 < r < R$ et considérons l'e.v.n. $(E, ||\ ||_\infty)$ où $E = C_b(B(0,r), \mathcal{A})$; c'est un espace de Banach (voir 7.1.2). Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $f^n : B(0,r) \longrightarrow \mathcal{A} : a \mapsto a^n$; elle est évidemment bornée (elle vérifie a $||f^n(a)|| = ||a^n|| \leq ||a||^n < r^n$ pour tout $a \in B(0,r)$), de sorte que $f^n \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; Considérons alors la série $\sum \lambda_n f^n$; cette série converge dans l'espace $(E, ||\ ||_\infty)$ (car elle converge normalement : $||\lambda_n f^n||_\infty = |\lambda_n| \sup_{a \in B(0,r)} ||a^n|| \leq |\lambda_n| \sup_{a \in B(0,r)} ||a||^n \leq |\lambda_n| r^n$ et la série $\sum \lambda_n r^n$ converge absolument puisque $0 < r < R$), de sorte que sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n f^n$ est une application continue bornée sur $B(0,r)$. L'application σ_R proposée étant égale à cette somme, elle est continue sur toutes les boules $B(0,r)$ avec $0 < r < R$. La continuité de σ_R sur $B(0,R)$ résulte alors du fait que $B(0,R) = \bigcup_{0<r<R} B(0,r)$, d'après 4.3.14. □

7.4.8 Théorème : Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach ; alors la bijection *inv* : $\mathcal{A}^* \longrightarrow \mathcal{A}^* : a \mapsto a^{-1}$ est continue.

Preuve : On utilise 7.4.7. Le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$ étant égal à 1, d'une part on retrouve (voir 7.4.4) que la série $\sum a^n$ converge pour tout $a \in \mathcal{A}$ vérifiant $||a|| < 1$ et, d'autre part on obtient que l'application $\sigma_1 : B(0,1) \longrightarrow \mathcal{A} : a \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a^n$ est continue ; utilisant 7.4.4, on voit en fait que

$\sigma_1(a) = (1-a)^{-1} \in \mathcal{A}^*$ pour tout $a \in B(0,1)$. En composant cette application σ_1 avec l'homéomorphisme $B(1,1) \longrightarrow B(0,1) : a \mapsto 1-a$, on obtient que la restriction $inv : B(1,1) \longrightarrow \mathcal{A}^*$ est continue (on se rappelle que $B(1,1) \subset \mathcal{A}^*$ (voir 7.4.5)). Pour tout $b \in \mathcal{A}^*$ fixé, on considère alors le composé :

$B(b, 1/||b^{-1}||) \xrightarrow{\alpha} B(1,1) \xrightarrow{inv} \mathcal{A}^* \xrightarrow{\beta} \mathcal{A}^*$ où α et β sont respectivement définies par $\alpha(a) = b^{-1}a$ et $\beta(a) = ab^{-1}$ (on utilise l'égalité $b^{-1}a = 1 + b^{-1}(a-b)$ pour voir que l'on a bien $\alpha(a) \in B(1,1)$ pour tout $a \in B(b, 1/||b^{-1}||)$: en effet, $||b^{-1}a - 1|| = ||b^{-1}(a-b)|| \leq ||b^{-1}||\,||a-b|| < ||b^{-1}||\,(1/||b^{-1}||) = 1$). Comme $(\beta \circ inv \circ \alpha)(a) = a^{-1} = inv(a)$ pour tout $a \in B(b, 1/||b^{-1}||)$, on en déduit que la restriction $inv : B(b, 1/||b^{-1}||) \longrightarrow \mathcal{A}^*$ est continue (α et β sont continues, d'après 7.4.2 ; on a vu dans la preuve de 7.4.6 que $B(b, 1/||b^{-1}||) \subset \mathcal{A}^*$ lorsque $b \in \mathcal{A}^*$).

Finalement, on obtient la continuité de $inv : \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathcal{A}^*$ grâce à 4.3.14 puisque $\mathcal{A}^* = \bigcup_{b \in \mathcal{A}^*} B(b, 1/||b^{-1}||)$. □

7.4.9 Remarque : On avait déjà prouvé dans 4.2.8 que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ à l'aide de l'égalité $GL_n(\mathbb{R}) = \overset{-1}{det}(\mathbb{R}^*)$, et ceci, quelle que soit la norme choisie sur $M_n(\mathbb{R})$, puisqu'elles sont toutes équivalentes, d'après 5.1.23. De plus, on voit facilement directement que l'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue, les coefficients de A^{-1} se calculant à l'aide de formules algébriques.

5. EXPONENTIELLES DANS UNE ALGEBRE DE BANACH

Dans ce chapitre, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont deux algèbres de Banach.

7.5.1 Proposition : Soit $a \in \mathcal{A}$; alors la série $\sum \frac{1}{n!}a^n$ est convergente.

Preuve : Cela résulte immédiatement de 7.4.7 puisque la série entière $\sum \frac{1}{n!}x^n$ a un rayon de convergence infini. □

7.5.2 Définition : Soit $a \in \mathcal{A}$; la somme de la série convergente $\sum \frac{1}{n!}a^n$ est un élément de $\mathcal{A}$ appelé *l'exponentielle de a* et noté $e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}a^n = \lim \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}a^k$.

7.5.3 Proposition : Pour tout $a \in \mathcal{A}$, on $||e^a|| \leq e^{||a||}$.

Preuve : On applique 7.3.3 à la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}a^n$ (pour l'inégalité $||a^0|| \leq a||^0$, on utilise l'hypothèse faite dans cet ouvrage sur toute algèbre normée : elles vérifient l'inégalité $||1|| \leq 1$ ...qui est même une égalité, d'après 7.4.3). □

7.5.4 Théorème : L'application exponentielle $exp : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^* : a \mapsto e^a$ est continue.

Preuve : Résulte encore de 7.4.7. □

7.5.5 Proposition : Si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de Banach de $\mathcal{A}'$ (voir 7.4.1), on a $e^a \in \mathcal{A}$ pour tout $a \in \mathcal{A}$.

Preuve : Par hypothèse, on a $a+b, ab, \lambda a \in \mathcal{A}$ pour tout $a, b \in \mathcal{A}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Par suite, pour tout $a \in \mathcal{A}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a^k \in \mathcal{A}$; la limite $e^a = \lim s_n$ est donc aussi dans $\mathcal{A}$ puisque $\mathcal{A}$ est fermé dans $\mathcal{A}'$ (voir 6.4.15). On peut aussi obtenir ce résultat comme conséquence de 7.5.6, dans lequel on prend pour f l'injection canonique $j : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$. □

7.5.6 Proposition : Soit $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ un homomorphisme d'algèbres de Banach (voir 7.4.1) ; on a $f(e^a) = e^{f(a)}$ pour tout $a \in \mathcal{A}$.

Preuve : Il suffit d'écrire $f(e^a) = f\left(\lim \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a^k\right) = \lim f\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a^k\right) = \lim \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (f(a))^k = e^{f(a)}$. □

7.5.7 Proposition : Soit $a, b \in \mathcal{A}$ tels que $ab = ba$; alors, on a $e^{a+b} = e^a e^b$. Par suite, $e^a \in \mathcal{A}^*$ et $(e^a)^{-1} = e^{-a}$.

Preuve : La preuve se calque sur celle de $e^{x+y} = e^x e^y$ dans les réels. En effet, on a encore une formule du binôme pour $(a+b)^n$, vue l'hypothèse $ab = ba$. □

7.5.8 Proposition : Soit $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{A}^*$; on a $e^{bab^{-1}} = be^a b^{-1}$.

Preuve : En remarquant que, pour tout $b \in \mathcal{A}^*$, l'application $\gamma_b : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} : a \mapsto bab^{-1}$ est un isomorphisme d'algèbres de Banach (voir 7.4.1 et 7.4.2), et donc que $\gamma_b(e^a) = e^{\gamma_b(a)}$ (voir 7.5.6). □

6. EXPONENTIELLES D'ENDOMORPHISMES ET DE MATRICES

Dans ce chapitre, on considérera les cas particuliers des algèbres de Banach $\mathcal{L}_c(E)$ (E étant un espace de Banach) et $M_n(\mathbb{R})$ citées dans 7.4.3 (chacune étant munie d'une norme d'opérateur) ; on a donc des exponentielles $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n$ d'endomorphisme continu (où $u^n = \overbrace{u \circ \ldots \circ u}^{n \text{ fois}}$, et où $u^0 = id$ vérifie $||id|| = 1$) et $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ de matrice (où $A^0 = I$, la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$, vérifie $||I|| = 1$) ; et bien sûr, on a $e^u \in \mathcal{L}_c(E)$ et $e^A \in M_n(\mathbb{R})$.

Les exponentielles d'endomorphismes sont très utiles pour résoudre l'équation différentielle $x'(t) = u(x(t))$, où $x : \mathbb{R} \longrightarrow E$ est une application dérivable : en effet, $e^{tu}(a)$ est l'unique solution de cette équation qui satisfait la condition initiale $x(0) = a$, où $a \in E$ (la formule établie dans 7.5.8 est alors intéressante pour calculer e^{tu} à l'aide de l'exponentielle d'une réduction de l'endomorphisme u) ; bien sûr, lorsque $E = \mathbb{R}^n$, l'équation différentielle équivaut à la donnée d'un système différentiel linéaire (voir 7.6.5).

7.6.1 Exemple (*en exercice*) : Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, Le rapport entre les exponentielles d'endomorphisme et de matrice est matérialisé par la relation $mat_B(e^u) = e^{mat_B(u)}$ (où B est une base de $\mathbb{R}^n$, et où $mat_B(u)$ et $mat_B(e^u)$ désignent respectivement les matrices de u et e^u dans la base B), vraie pour tout $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

7.6.2 Définition : Soit $u \in \mathcal{L}_c(E)$ et $A \subset E$. On dit que A est *u-stable* si elle vérifie $u(A) \subset A$; on note alors $u|_A : A \longrightarrow A$ la restriction de u à A.

7.6.3 Proposition : Pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E)$ et tout sous-espace vectoriel F fermé et u-stable de E, alors F est e^u-stable et l'on a $e^u|_F = e^{u|_F}$.

Preuve : Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E et $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}_c(E) \mid u(F) \subset F\}$. On constate que $\mathcal{A}_F$ est une sous-algèbre de Banach (voir 7.4.1) de $\mathcal{L}_c(E)$: en effet, pour tout $u, v \in \mathcal{A}_F$, tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in F$, on a $(u+v)(x) = u(x) + v(x) \in F$, $(u \circ v)(x) = u(v(x)) \in F$ et $(\lambda u)(x) = \lambda u(x) \in F$. D'après 7.5.5, on a donc $e^u \in \mathcal{A}_F$ pour tout $u \in \mathcal{A}_F$, ce qui prouve que F est e^u-stable pour tout $u \in \mathcal{A}_F$. De plus $\mathcal{A}_F$ est complet puisque fermé dans $\mathcal{L}_c(E)$ qui l'est : on utilise le fait que, si (u_n) est une suite dans $\mathcal{A}_F$ et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ vérifient $||u_n - u|| \to 0$, alors $u_n(x) \to u(x)$ pour tout $x \in E$, puisque l'application $eval_x : \mathcal{L}_c(E) \longrightarrow E : u \mapsto u(x)$ est continue (car $||x||$-lipschitzienne : voir 2.4.9) ; par suite, pour tout $x \in F$, on a $u(x) = \lim u_n(x) \in F$ puisque, par hypothèse, $u_n(x) \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et F est fermé dans E ; on a donc bien $u \in \mathcal{A}_F$.

Considérons alors l'application $f : \mathcal{A}_F \longrightarrow \mathcal{L}_c(F) : u \longrightarrow u|_F$; c'est de façon évidente un homomorphisme d'algèbres de Banach (elle est continue car 1-lipschitzienne : en effet, pour tout $u \in \mathcal{A}_F$, on a $||f(u)|| = ||u|_F|| = \sup_{x \in F} ||u(x)|| \le \sup_{x \in E} ||u(x)|| = ||u||$). D'après 7.5.6, elle vérifie donc $f(e^u) = e^{f(u)}$, *i.e.* $e^u|_F = e^{u|_F}$ pour tout $u \in \mathcal{A}_F$. □

7.6.4 Corollaire : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$; supposons que A se décompose en k blocs A_p sur la diagonale ; alors la matrice e^A se décompose en k blocs e^{A_p} sur la diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} (A_1) & 0 & 0 \\ 0 & (A_2) & 0 \\ 0 & 0 & (A_3) \end{pmatrix} \qquad e^A = \begin{pmatrix} (e^{A_1}) & 0 & 0 \\ 0 & (e^{A_2}) & 0 \\ 0 & 0 & (e^{A_3}) \end{pmatrix}$$

En particulier, si D est diagonale (ses éléments sur la diagonale étant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$), alors e^D est aussi diagonale (ses éléments sur la diagonale étant $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$).

Preuve : Soit u l'unique élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ vérifiant $mat_{\mathcal{B}_0}(u) = A$ où $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Par hypothèse, on a $\mathbb{R}^n = \oplus_{p=1}^k F_p$, où chaque F_p est un sous-espace u-stable tel que $A_p = mat_{\mathcal{B}_0}(u|_{F_p})$; on utilise donc 7.6.1 et 7.6.3 pour écrire $e^{A_p} = e^{mat_{\mathcal{B}_0}(u|_{F_p})} = mat_{\mathcal{B}_0}(e^{u|_{F_p}}) = mat_{\mathcal{B}_0}(e^u|_{F_p})$. □

7.6.5 Exemples (*en exercices*) :

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, calculer l'exponentielle de la similitude de matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Résoudre le système $x' = Ax$, où $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Chapitre VIII
LES ESPACES DE HILBERT

1. ESPACES HILBERTIENS

8.1.1 Définition : On appelle *espace hilbertien* ou *espace de Hilbert* un espace préhilbertien complet (voir 1.4.1).

8.1.2 Exemples : Les $\mathbb{R}^n$ munis de leur produit scalaire euclidien ; plus généralement, tout espace euclidien (voir 1.4.1, 1.4.4 et 6.4.10) ; L'espace l^2 muni du produit scalaire $< x, y >= \sum_n x_n y_n$ (on rappelle que c'est le seul espace préhilbertien parmi tous les l^p (voir 1.4.5 et 7.1.2)) ...on verra dans 8.4.12 que l^2 est isomorphe isométriquement à tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Par contre, l'espace préhilbertien $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ (muni de son produit scalaire $< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$) n'est pas un espace de Hilbert (voir 1.4.4 et 7.1.2).

8.1.3 Théorème (de projection orthogonale) : Soit F un sous-espace vectoriel complet d'un espace préhilbertien H, et x un point de H. Alors (voir 1.1.4) la "distance" $d(x,F)$ est atteinte en un unique point de F : plus précisément, il existe un unique élément de F, appelé *projection orthogonale* de x sur F, et noté $p_F(x)$, vérifiant la propriété suivante : $d(x,F) = ||x - p_F(x)||$ (cette projection $p_F(x)$ est aussi l'unique élément de F vérifiant $x - p_F(x) \perp F$) ; l'application $p_F : H \longrightarrow H$ ainsi définie est appelée la *projection orthogonale* ou le *projecteur orthogonal* sur F (elle est linéaire et vérifie $p_F \circ p_F = p_F$). De plus, on a $F \oplus F^\perp = H$.

Preuve : Posons $d = d(x,F) = \inf_{y\in F} ||x - y||$; comme F est fermé dans H, on a l'équivalence $d(x,F) = 0$ ssi $x \in F$.

Unicité : Soit $y, y' \in F$ vérifiant $||x - y|| = d = ||x - y'||$; utilisant alors la loi du parallélogramme (voir 1.4.4), on obtient $||y - y'||^2 = ||(x-y) - (x-y')||^2 = 2||x-y||^2 + 2||x-y'||^2 - ||2x - (y+y')||^2 = 4(d^2 - ||x - (y+y')/2||^2) \leq 0$ (car $(y+y')/2 \in F$ implique $||x - (y+y')/2|| \geq d$). Par suite $y = y'$.

Existence : Par définition de d, on sait (voir 0.2.4) que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un $y_n \in F$ vérifiant $d \leq ||x - y_n|| < d + 1/n$; on dispose donc d'une suite (y_n) dans F telle que $\lim ||x - y_n|| = d$. Montrons que cette suite (y_n) converge dans F ; en fait, comme F est complet, il suffit de prouver qu'elle est de Cauchy. On utilise à nouveau la loi du parallélogramme et le fait que $(y_n + y_m)/2 \in F$ pour écrire $||y_n - y_m||^2 = 2||x - y_n||^2 + 2||x - y_m||^2 - ||2x - (y_n + y_m)||^2 \leq 2||x - y_n||^2 + 2||x - y_m||^2 - 4d^2$; par suite, $||y_n - y_m|| \to 0$ quand $n, m \to 0$, ce qui prouve que (y_n) est bien une suite de Cauchy. Posons $y = \lim y_n$; alors $y \in F$ vérifie $d = \lim ||x - y_n|| = ||x - \lim y_n|| = ||x - y||$.

Ainsi, y est l'unique élément de F vérifiant $||x - y|| = d$; c'est donc la projection orthogonale $p_F(x)$ de x sur F. Bien sûr, $z = x - p_F(x) \in F^\perp$: c'est trivialement vrai si $z = 0$ (*i.e.* si $x \in F$) ; si $z \neq 0$ et s'il existait un $y_0 \in F$ tel que $< z, y_0 >= \alpha \neq 0$ (donc $y_0 \neq 0$), alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $y = p_F(x) + \lambda y_0$

vérifierait $||x-y||^2 = ||z||^2 + ||\lambda y_0||^2 - 2 < z, \lambda y_0 >= d^2 + \lambda^2 ||y_0||^2 - 2\lambda\alpha$; il suffit alors de choisir un λ vérifiant $0 < \lambda < 2\alpha/||y_0||^2$ pour obtenir $||x-y|| < d$, ce qui est absurde puisque $y \in F$. Par suite, on a $< z, y >= 0$ pour tout $y \in F$, *i.e.* $z = x - p_F(x) \in F^\perp$ (en fait, comme $F \cap F^\perp = \{0\}$, $p_F(x)$ est aussi caractérisé par le fait que c'est l'unique élément de F tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$: si $y' \in F$ vérifiait $x - y' \in F^\perp$, on aurait $y' - p_F(x) = (x - p_F(x)) - (x - y') \in F \cap F^\perp$, *i.e.* $y' = p_F(x)$). La décomposition $H = F \oplus F^\perp$ résulte alors de la décomposition unique $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$, de x, en la somme d'un élément de F et d'un élément de $F^\perp$.

L'application $p_F : H \longrightarrow H$ ainsi définie vérifie l'égalité $p_F \circ p_F = p_F$ (puisque $p_F(x) \in F$ pour tout $x \in H$). Vérifions qu'elle est linéaire : soit $x, x' \in H$; l'égalité $p_F(x + x') = p_F(x) + p_F(x')$ résulte du fait que $p_F(x) + p_F(x')$ vérifie la caractérisation des projections orthogonales mentionnée plus haut, à savoir, $(x+x') - (p_F(x) + p_F(x')) \in F^\perp$ (qui va de soi puisque $x - p_F(x)$, $x' - p_F(x') \in F^\perp$ et $F^\perp$ est un espace vectoriel (voir 1.4.7)). On raisonne de même pour l'égalité $p_F(\lambda x) = \lambda p_F(x)$. □

8.1.4 Remarques : Dans un espace préhilbertien, le fait que la distance $d(x, F)$ soit atteinte en un unique point de F n'est pas seulement vrai lorsque F est un sous-espace vectoriel complet, mais aussi, plus généralement, lorsque F est une partie complète et convexe (voir la preuve de 8.1.3).

Le théorème 8.1.3 est vrai dans le cas où F est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H, d'après 6.4.14.

Tout e.v.n. de dimension finie étant complet (voir 6.4.10), le théorème de projection othogonale 1.4.8 est un cas particulier du théorème 8.1.3 ci-dessus ; on a donné une preuve constructive de 1.4.8, spécifique au cas de la dimension finie (voir dans 1.4.9 des exemples de calculs de projections orthogonales sur des sous-espaces de dimension finie). Voir aussi 5.1.28 où l'on donne un exemple où $d(x, F)$ est atteinte en une infinité de points de F (bien qu'on soit en dimension finie dans cet exemple, la norme proposée ne dérive pas d'un produit scalaire).

8.1.5 Exemples (*en exercices*) : La projection orthogonale p_F sur un sous-espace complet F est 1-lipschitzienne, non contractante dans le cas où $F \neq \{0\}$ (on ne change rien aux preuves données dans 1.6.12, 2.4.9 et 6.4.25).

Soit H un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel ; si F est complet, alors $F^{\perp\perp} = F$ (ça n'est pas toujours vrai lorsque F n'est pas complet : voir un exemple dans 1.4.9) ; si F n'est pas complet mais H l'est, on a $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

Soit H un espace préhilbertien, F et G deux sous-espaces vectoriels complets et orthogonaux (voir 1.4.6) ; alors $F + G$ est complet ; une conséquence immédiate est que, dans un espace de Hilbert, la somme de deux sous-espaces vectoriels fermés et orthogonaux est fermée (voir 4.4.12 et 5.1.19).

Dans $E = C([0,1]), \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire naturel (voir 1.4.4), les sous-espaces $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid \int_0^1 f(x)dx = 0\}$ ne sont pas complets (voir 1.4.9). Sont-ils fermés ?

2. COMPLETION HILBERTIENNE

Soit H un espace préhilbertien. La bilinéarité et la continuité du produit scalaire de H (voir 1.4.1, 2.3.12 et 2.3.20) nous permet de définir l'application linéaire $\phi : H \longrightarrow H^\star : x \mapsto \langle x, - \rangle$, où $H^\star = \mathcal{L}_c(H, \mathbb{R})$ est le dual topologique de H (voir 7.1.6). On munit $H^\star$ de sa norme d'opérateur (voir 2.4.3). Comme dans la section II.4, on note encore toutes les normes par le même symbole $\|\ \|$: ici, la norme sur H associée au produit scalaire, et la norme d'opérateur sur $H^\star$.

8.2.1 Proposition : Pour tout $x \in H$, on a $\|\phi(x)\| = \|x\|$; par suite, l'application linéaire ϕ est une isométrie $H \longrightarrow H^\star$.

Preuve : Soit $x \in H$; par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient, pour tout $y \in H$, $| \langle x, y \rangle | \leq \|x\|\,\|y\|$, et donc aussi $\|\phi(x)\| = \sup_{y \neq 0} |\langle x, y \rangle| / \|y\| \leq \|x\|$. En fait, cette dernière inégalité est une égalité : si $x = 0$, cela va de soi ; sinon, on écrit $\|x\| = |\langle x, x \rangle| / \|x\| \leq \|\phi(x)\|$ (cette preuve a déjà été donnée dans 2.4.9 dans le cas d'une forme linéaire sur l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_2)$). □

8.2.2 Remarque : Une isométrie étant injective, la restriction $\phi : H \longrightarrow \phi(H)$ est un isomorphisme isométrique, donc $\phi(H)$ est naturellement muni d'un produit scalaire ("image réciproque", par $\phi^{-1} : \phi(H) \longrightarrow H$, du produit scalaire de H (voir 1.4.4)), défini par $\langle \phi(a), \phi(b) \rangle = \langle a, b \rangle$ pour tout $a, b \in H$.

8.2.3 Théorème (de repésentation de Riesz) : Si H est un espace de Hilbert, l'isométrie linéaire $\phi : H \longrightarrow H^\star$ est bijective.

Preuve : Il s'agit de prouver que ϕ est surjective. Fixons pour cela un $u \in H^\star$; montrons qu'il existe un $a \in H$ tel que $\phi(a) = u$. Si $u = 0$, $a = 0$ répond à la question. Sinon, $F = Ker\, u = \overset{-1}{u}(\{0\})$ est un hyperplan (voir 0.3.4) fermé (car u est continue). Comme H est complet, on a $H = F \oplus F^\perp$ (voir 8.1.3 et 8.1.4), de sorte que $F^\perp$ est une droite vectorielle. Soit $a_0 \in F^\perp$ tel que $\|a_0\| = 1$ et $a = u(a_0)a_0$. Montrons que $u = \phi(a)$, *i.e.* que $u(x) = \langle a, x \rangle$ pour tout $x \in H$: c'est vrai pour $x \in F$, car alors $u(x) = 0$ et $\langle a, x \rangle = 0$ puisque $a \in F^\perp$; si $x \in F^\perp$, il s'écrit $x = \lambda a_0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, de sorte que $\langle a, x \rangle = \langle u(a_0)a_0, \lambda a_0 \rangle = \lambda u(a_0)\|a_0\|^2 = \lambda u(a_0) = u(\lambda a_0) = u(x)$; enfin, si $x \in H$, alors $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$, si bien que $\langle a, x \rangle = \langle a, y \rangle + \langle a, z \rangle = u(y) + u(z) = u(y+z) = u(x)$. □

8.2.4 Remarque : Ainsi, lorsque H est un espace de Hilbert, $H^\star = \phi(H)$ en est aussi un (il est complet d'après 7.1.3 ; sa norme d'opérateur dérive du produit scalaire $\langle u, v \rangle = \langle \phi(a), \phi(b) \rangle = \langle a, b \rangle$, où a et b sont les uniques éléments de H vérifiant $\phi(a) = u$ et $\phi(b) = v$; voir 8.2.2).

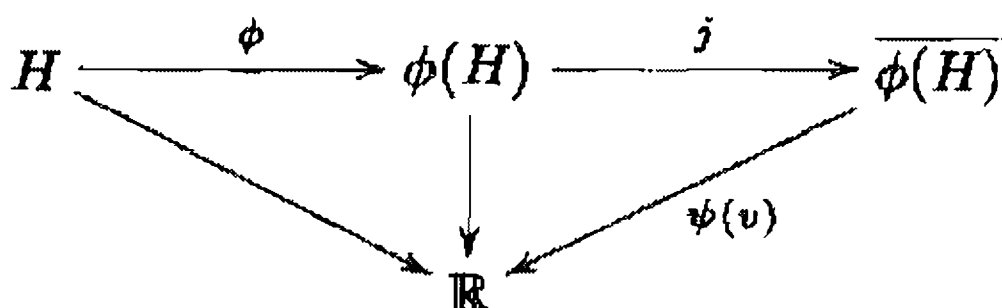
8.2.5 Théorème (de complétion hilbertienne) : Soit H un espace préhilbertien ; alors il existe un espace de Hilbert $\widehat{H}$ et une isométrie linéaire $\varphi : H \longrightarrow \widehat{H}$ telle que $\varphi(H)$ soit dense dans $\widehat{H}$ (on dit que $(\widehat{H}, \varphi)$ est un *complété hilbertien de* H). Ce complété hilbertien de H est unique à isomorphisme isométrique près.

Preuve : L'unicité du complété hilbertien à isomorphisme isométrique près va de soi puisque tout complété hilbertien est en particulier un complété normé (voir 7.2.4). Posons $F = \overline{\phi(H)}$, l'adhérence de $\phi(H)$ dans $H^\star$; F est donc un sous-espace vectoriel de $H^\star$ (voir 3.1.2) que l'on munit de la norme d'opérateur induite. D'abord, F est complet comme fermé dans $H^\star$ qui l'est (voir 7.1.5). Définissons un

produit scalaire sur F : montrons que l'expression $(1/2)(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2)$ en est bien un (c'est un candidat naturel, d'après 1.4.3). D'abord, cette expression (que l'on notera aussi $< u, v >$), est évidemment symétrique et vérifie $< u, u > = ||u||^2$. En utilisant le fait que la norme est continue et que ϕ est une isométrie linéaire, on obtient, lorsque $u = \lim \phi(a_n)$ et $v = \lim \phi(b_n)$ avec les a_n et les b_n dans H : $< u,v > = \lim\big((1/2)(||\phi(a_n) + \phi(b_n)||^2 - ||\phi(a_n)||^2 - ||\phi(b_n)||^2)\big) = \lim\big((1/2)(||a_n + b_n||^2 - ||a_n||^2 - ||b_n||^2)\big) = \lim < a_n, b_n >$; en particulier, si $u = \phi(a), v = \phi(b) \in \phi(H)$, on a, $< u, v > = < \phi(a), \phi(b) > = < a, b >$ (l'expression proposée coïncide donc, sur $\phi(H)$, avec le produit scalaire de $\phi(H)$). La bilinéarité de $< u, v >$ résulte immédiatement de celle du produit scalaire de H et de l'égalité $< u, v > = \lim < a_n, b_n >$. On a ainsi prouvé que $F = \overline{\phi(H)}$ est un espace de Hilbert, et donc que $(\overline{\phi(H)}, \phi)$ est un complété hilbertien de H où $\phi : H \longrightarrow \overline{\phi(H)}$ est une restriction de l'isométrie linéaire $\phi : H \longrightarrow H^\star$. □

8.2.6 Théorème : Soit H un espace préhilbertien; alors $(H^\star, \phi)$ est un complété hilbertien de H.

Preuve : D'après 8.2.5, il suffit de prouver que $H^\star = \overline{\phi(H)}$. Considérons l'isomorphisme isométrique $\gamma : \overline{\phi(H)} \longrightarrow H^\star$ obtenu par la composition des trois isomorphismes isométriques : $\overline{\phi(H)} \xrightarrow{\psi} (\overline{\phi(H)})^\star \xrightarrow{\alpha} (\phi(H))^\star \xrightarrow{\widehat{\phi}} H^\star$, ψ étant l'homologue, pour $\overline{\phi(H)}$, du ϕ défini pour H ci-dessus (ψ est un isomorphisme isométrique d'après 8.2.3), α et $\widehat{\phi}$ sont les isomorphismes isométriques vus dans 7.2.2 et 2.4.9 ($\widehat{\phi}$ est un isomorphisme isométrique car $\phi : H \longrightarrow \phi(H)$ en est un ... voir 8.2.1 et 8.2.2). Par définition, pour tout $v \in \overline{\phi(H)}$, $\psi(v) = < v, - >$, $\alpha(\psi(v)) = \psi(v) \circ j$ est la restriction de $\psi(v)$ à $\phi(H)$ (en notant j l'injection canonique de $\phi(H)$ dans son adhérence $\overline{\phi(H)}$), de sorte que $\gamma(v) = \psi(v) \circ j \circ \phi$; par suite, pour tout $x \in H$, on a $(\gamma(v))(x) = < v, \phi(x) >$.



En fait, on a $\gamma(v) = v$ pour tout $v \in \overline{\phi(H)}$. En effet, si $v = \lim \phi(a_n)$ où les a_n sont tous dans H, on a, pour tout $x \in H$: $(\gamma(v))(x) = < v, \phi(x) > = < \lim \phi(a_n), \phi(x) > = \lim < \phi(a_n), \phi(x) > = \lim < a_n, x > = \lim(\phi(a_n)(x)) = (\lim \phi(a_n))(x) = v(x)$, l'avant dernière égalité résultant de la continuité de l'application $eval_x$ (voir 2.4.9).

$\gamma : \overline{\phi(H)} \longrightarrow H^\star$ étant une bijection vérifiant $\gamma(v) = v$ pour tout $v \in \overline{\phi(H)}$, on a $\overline{\phi(H)} = \gamma(\overline{\phi(H)}) = H^\star$; on utilise donc 8.2.5 pour conclure. □

8.2.7 Exemples : Pour sa norme $||\ ||_2$, l'espace l^2 est un complété normé de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ (voir 7.2.5) ; cette norme dérivant d'un produit scalaire qui en fait un espace de Hilbert (voir 8.1.2), c'est donc un complété hilbertien de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. On verra dans 8.4.11 que l^2 est un complété hilbertien de tout espace préhilbertien séparable de dimension infinie.

8.3.1 Définitions : Soit H un espace préhilbertien. Une partie A de H est dite *totale* dans H si le sous-espace vectoriel $Vect(A)$, engendré par A (*i.e.* formé des combinaisons linéaires d'éléments de A ; voir 0.3.2), est dense dans H.

Une famille orthonormée $(e_i)_{i\in I}$ de H (voir 1.4.6) est appelée une *base hilbertienne* de H si l'ensemble $\{e_i \mid i \in I\}$ est total dans H.

Une famille orthonormée $(e_i)_{i\in I}$ de H est dite *maximale* si toute famille orthonormée qui la contient lui est égale (voir 0.2.3).

8.3.2 Proposition : Dans un espace préhilbertien, toute famille orthonormée se plonge dans une famille orthonormée maximale.

<u>Preuve</u> : Notons $\mathcal{O}$ l'ensemble de toutes les parties orthonormées (*i.e.* dont les éléments forment une famille orthonormée) de H ; $\mathcal{O}$ est un ensemble ordonné par la relation d'inclusion. Montrons que $\mathcal{O}$ est inductif (voir 0.2.2). Soit donc $\{A_i \mid i \in I\}$ une partie totalement ordonnée de $\mathcal{O}$; on montre facilement que $B = \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{O}$: en effet, si $x, y \in B$, il existe, par hypothèse, un $i \in I$ tel que $x, y \in A_i$; comme A_i est orthonormée, on a $< x, y > = 1$ ou 0 selon que que $x = y$ ou non. Par suite, B est un majorant de $\{A_i \mid i \in I\}$ dans $\mathcal{O}$. Ainsi, $\mathcal{O}$ est bien inductif. Il en résulte que tout élément de $\mathcal{O}$ est inclus dans un élément maximal (voir le lemme de Zorn dans 0.2.3). □

8.3.3 Corollaire : Tout espace préhilbertien possède une famille orthonormée maximale.

<u>Preuve</u> : On applique 8.3.2 à la famille vide ! □

8.3.4 Proposition : Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée d'un espace préhilbertien H ; alors $(e_i)_{i\in I}$ est maximale dans H ssi $\{e_i \mid i \in I\}^\perp = \{0\}$.

<u>Preuve</u> : Supposons que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille orthonormée maximale. S'il existait un $x \in H$, non nul et orthogonal à tous les e_i, on disposerait d'une famille orthonormée, la famille $(e_j)_{j\in J}$, où $J = I \cup \{k\}$, $k \notin I$ et $e_k = x/||x||$, contenant strictement la famille $(e_i)_{i\in I}$; mais ceci est impossible par hypothèse. Par suite, $x = 0$ est le seul élément de H qui est orthogonal à tous les e_i.

Réciproquement, supposons que $x = 0$ est le seul élément de H orthogonal à tous les e_i. Si la famille $(e_i)_{i\in I}$ n'était pas maximale, Il existerait une partie non vide K et une famille orthonormée $(x_j)_{j\in J}$ où $J = I \cup K$ et $x_i = e_i$ pour tout $i \in I$. Mais alors, tous les x_k avec $k \in K$ seraient nuls (puisque chacun est orthogonal à tous les e_i) ; mais ceci est impossible puisqu'ils sont tous de norme 1. □

8.3.5 Proposition : Dans un espace préhilbertien, toute base hilbertienne est une famille orthonormée maximale. Dans un espace de Hilbert, une famille orthonormée est une base hilbertienne ssi c'est une famille maximale.

<u>Preuve</u> : Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée dans un espace préhilbertien H, et posons $A = \{e_i \mid i \in I\}$. On utilise la caratérisation des familles orthonormées maximales donnée dans 8.3.4.

Supposons A totale dans H et soit $x \in A^\perp$; prouvons que $x = 0$. Soit donc $\varepsilon > 0$; par hypothèse, il existe un $y \in Vect(A)$ vérifiant $||x - y|| < \varepsilon$. Comme $x \in A^\perp = (Vect(A))^\perp$ (voir 1.4.7), on a $||x - y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ et donc $||x||^2 \leq ||x - y||^2 < \varepsilon^2$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $||x|| = 0$, *i.e.* $x = 0$.

Supposons maintenant H complet et que $A^\perp = \{0\}$; on doit alors prouver que A est totale, *i.e.* que $\overline{Vect(A)} = H$. C'est immédiat en considérant l'inclusion $A \subset \overline{Vect(A)}$: on obtient $(\overline{Vect(A)})^\perp \subset A^\perp = \{0\}$, et donc $H = \{0\}^\perp \subset (\overline{Vect(A)})^{\perp\perp} = \overline{Vect(A)}$, la dernière égalité résultant du fait que $\overline{Vect(A)}$ est complet puisque fermé dans H qui l'est (voir 8.1.5). Remarquons que l'on n'a pas utilisé le fait que la famille (e_i) est orthonormée dans cette partie. □

8.3.6 Théorème : Tout espace de Hilbert possède une base hilbertienne.

Preuve : On utilise 8.3.3 et 8.3.5. □

8.3.7 Exemples (*en exercices*) : On insiste : pour une famille orthonormée $(e_i)_{i\in I}$ d'un espace préhilbertien H, on a l'implication : $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne $\Longrightarrow$ ($x = 0$ ssi $< x, e_i >= 0$ pour tout $i \in I$) ; la réciproque est vraie lorsque H est un espace de Hilbert.

Dans un espace euclidien (voir 1.4.1), les bases hilbertiennes sont les bases orthonormées. Dans un espace préhilbertien, toute base orthonormée est une base hilbertienne ; la réciproque est fausse : voir l'exemple qui suit.

La suite (ϵ_n), définie par $\epsilon_{nk} = 1$ ou 0 selon que $n = k$ ou non, est une base orthonormée de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, considéré comme sous-espace de l'espace hilbertien l^2 (voir 8.1.2) ; ça n'est donc pas une base orthonormée de l^2, mais c'en est une base hilbertienne.

La suite (x^n) est une base (au sens de 0.3.3) de l'espace des fonctions polynomiales (qui est donc égal à l'espace $Vect(\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\})$). En se limitant à $[0,1]$, cette suite est totale dans l'espace préhilbertien $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ (voir 8.1.2) ; en orthonormalisant ces x^n selon la méthode de Gram-Schmidt (rappelée précisément dans 8.4.6), on obtient une base hilbertienne de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

8.3.8 Remarques : On retrouve le fait (voir 1.4.6) qu'en dimension finie il existe toujours une base orthonormée (qui est hilbertienne : voir 8.3.6 et 8.3.7).

Rappelons que tout espace vectoriel (et donc tout espace préhilbertien) possède une base (voir 0.3.3). Dans le chapitre suivant, on donne une condition suffisante pour qu'un espace préhilbertien possède une base hilbertienne dénombrable.

4. ESPACES PREHILBERTIENS SEPARABLES

8.4.1 Proposition : Soit H un espace préhilbertien possédant une suite (e_n) orthonormée. Alors, pour tout $x \in H$, la série numérique $\sum < x, e_n >^2$ est convergente et sa somme vérifie l'inégalité : $\sum_{n=0}^{\infty} < x, e_n >^2 \leq ||x||^2$, appelée *inégalité de Bessel.*

Preuve : Fixons un $n \in \mathbb{N}$ et considérons $y_n = \sum_{i=0}^{n} < x, e_i > e_i$; alors $y_n \in F_n$ où $F_n = Vect(e_0, \dots, e_n)$ est le sous-espace vectoriel de H engendré par $e_0, \dots, e_n$. Ces e_i formant une base orthonormée de F_n, on a (voir 1.4.6) $||y_n||^2 = \sum_{i=0}^{n} < y_n, e_i >^2$. En fait (voir 1.4.8), y_n est la projection orthogonale de x sur F_n, de sorte que $x - y_n \in F_n^\perp$. Il en résulte immédiatement d'une part que, pour tout $i = 0, \dots, n$, on a $x - y_n \perp e_i$, *i.e.* $< x, e_i > = < y_n, e_i >$, et d'autre part que $x - y_n \perp y_n$; on peut donc utiliser la règle de pythagore pour écrire $||x||^2 = ||x - y_n||^2 + ||y_n||^2 \geq ||y_n||^2$. On a donc obtenu $\sum_{i=0}^{n} < x, e_i >^2 \leq ||x||^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; il reste à faire un passage à la limite pour obtenir le résultat. □

8.4.2 Théorème : Soit H un espace préhilbertien et (e_n) une suite orthonormée dans H. Les énoncés suivants sont équivalents :

(1) pour tout $x \in H$, la série numérique $\sum < x, e_n >^2$ est convergente, de somme $\sum_{n=0}^{\infty} < x, e_n >^2 = ||x||^2$; cette égalité est appelée *égalité de Parseval Bessel*,

(2) pour tout $x \in H$, la série $\sum < x, e_n > e_n$ est convergente, de somme $\sum_{n=0}^{\infty} < x, e_n > e_n = x$,

(3) la suite (e_n) est une base hilbertienne.

Preuve : Fixons un $x \in H$ et posons $y_n = \sum_{i=0}^{n} < x, e_i > e_i$; on a vu dans la preuve de 8.4.1 que y_n est la projection orthogonale de x sur $F_n = Vect(e_0, \ldots, e_n)$ et qu'il vérifie $||y_n||^2 = \sum_{i=0}^{n} < x, e_i >^2 \leq ||x||^2 = ||x - y_n||^2 + ||y_n||^2$.

(1)$\Longrightarrow$(2) : Soit $\varepsilon > 0$; par hypothèse, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $||x||^2 - \sum_{i=0}^{n} < x, e_i >^2 \leq \varepsilon^2$, *i.e.* $||x||^2 - ||y_n||^2 \leq \varepsilon^2$, pour tout $n \geq N$. On a donc $||x - y_n||^2 = ||x||^2 - ||y_n||^2 \leq \varepsilon^2$ pour tout $n \geq N$; par suite $x = \lim y_n$.

(2)$\Longrightarrow$(3) : Par hypothèse, on a $x = \lim y_n$ avec $y_n \in F_n \subset Vect(\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\})$; ainsi, $Vect(\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ est dense dans H.

(3)$\Longrightarrow$(1) : Soit $\varepsilon > 0$; par hypothèse, il existe un $n \in \mathbb{N}$ et un $x_n \in F_n$ vérifiant $||x - x_n|| < \varepsilon$. Par suite, $||x - y_n|| = d(x, F_n) \leq ||x - x_n|| < \varepsilon$. Il en résulte que $0 \leq ||x||^2 - ||y_n||^2 \leq \varepsilon^2$; par suite, $||x||^2 = \lim ||y_n||^2$. □

8.4.3 Corollaire : Soit H un espace préhilbertien et F un sous-espace complet possédant une base hilbertienne dénombrable (e_n) ; alors, pour tout $x \in H$, la série $\sum < x, e_n > e_n$ est convergente dans F, de somme $\sum_{n=0}^{\infty} < x, e_n > e_n = p_F(x)$, la projection orthogonale de x sur F.

Preuve : D'abord, cette projection orthogonale $p_F(x)$ existe en effet pour tout $x \in H$ (voir 8.1.3). Plaçons-nous alors dans l'espace hilbertien F ; d'après 8.4.2, la série $\sum < p_F(x), e_n > e_n$ est convergente, de somme $\sum_{n=0}^{\infty} < p_F(x), e_n > e_n = p_F(x)$. Il reste donc à remarquer que l'on a $< p_F(x), e_n > = < x, e_n >$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $x - p_F(x) \perp F$. □

8.4.4 Exemples (*en exercices*) : Pour tout $a = (a_n) \in l^2$, la série $\sum a_n \epsilon_n$ est convergente et de somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \epsilon_n = a$, où (ϵ_n) est la base hilbertienne canonique de l^2 définie dans 8.3.7.

Soit (e_n) une base hilbertienne d'un espace préhilbertien H. La série convergente $\sum < x, e_n > e_n$ n'est, en général, pas normalement convergente (même si H est complet) ; remarquons qu'elle est normalement convergente ssi la série numérique $\sum | < x, e_n > |$ converge. De plus, pour tout $x \in H$, la décomposition $x = \sum_{n=0}^{\infty} < x, e_n > e_n$ est unique. Enfin, on a $< x, e_n > \to 0$ pour tout $x \in H$.

8.4.5 Remarque : Tout ce qui précède prouve que, lorsque l'on dispose d'une base hilbertienne dénombrable dans un espace préhilbertien, on peut généraliser en dimension infinie les résultats connus en dimension finie (voir 1.4.6 et 1.4.8) : tout élément de H a des "composantes" (elles sont ici en nombre infini) sur cette base, et on peut retrouver sa norme par l'égalité de Parseval-Bessel.

8.4.6 Proposition : Tout espace préhilbertien qui possède une base dénombrable, possède une base orthonormée dénombrable.

Preuve : Il suffit d'orthonormaliser la base dénombrable (u_n) donnée ; on a

rappelé dans 1.4.6 et 1.4.9 le procédé de Gram-Schmidt ; on l'adapte ici au cas dénombrable : on fait une construction par récurrence, en posant $v_0 = u_0$, sachant qu'à l'étape n, l'élément v_n, orthogonal à tous les v_k déjà construits (*i.e.* tels que $k \leq n-1$), s'écrit $v_n = u_n - p_{F_{n-1}}(u_n)$, où $F_{n-1} = Vect(\{v_k \mid k \leq n-1\}) = Vect(\{u_k \mid k \leq n-1\})$. Il reste alors à normaliser tous ces v_n. □

8.4.7 Définition : On dit qu'un espace préhilbertien est *séparable* s'il possède une partie totale (au plus) dénombrable.

8.4.8 Proposition : Un espace préhilbertien est séparable ssi il possède une base hilbertienne dénombrable.

Preuve : Soit H un espace préhilbertien ; bien sûr, s'il possède une base hilbertienne dénombrable, il est séparable. Inversement, soit $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une partie totale dénombrable de H. *A priori*, ces a_n ne sont pas forcément linéairement indépendants (voir 0.3.3) ; on doit donc commencer par en extraire une sous-suite (a_{n_k}) constituée des a_n qui ne sont pas combinaisons linéaires des a_i avec $i < n$. Par construction, ces a_{n_k} sont donc linéairement indépendants, et sont tels que tout élément de A en est une combinaison linéaire, *i.e.* on a l'inclusion $A \subset Vect(B)$ où $B = \{a_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ (on montre par récurrence que l'on a en effet $a_n \in Vect(B)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) ; par suite, $H = \overline{Vect(A)} \subset \overline{Vect(B)}$, ce qui prouve que B est aussi totale dans H. Il reste alors à orthonormaliser cette suite (a_{n_k}) selon le procédé de Gram-Schmidt rappelé dans 8.4.6, sachant que la suite orthonormée ainsi obtenue est encore totale puisque, par construction, elle engendre le même espace vectoriel que les a_{n_k} ; c'est donc une base hilbertienne. □

8.4.9 Exemples D'après 8.3.7, les espaces suivants sont séparables : les espaces euclidiens ; l'espace préhilbertien non complet $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et l'espace de Hilbert l^2 (pour les produits scalaires rappelés dans 8.1.2). On verra dans 8.4.15 qu'il existe des espaces préhilbertiens (ou hilbertiens) non séparables.

8.4.10 Remarque : On a vu dans 1.6.12 que tout espace euclidien est isométriquement isomorphe à un $\mathbb{R}^n$ (muni de sa structure euclidienne) ...on va généraliser ceci pour les espaces hilbertiens séparables de dimension infinie : c'est alors l'espace de Hilbert l^2, muni de son produit scalaire usuel $< x, y >= \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$, qui va remplacer les $\mathbb{R}^n$.

8.4.11 Théorème : L'espace de Hilbert l^2 est un complété hilbertien de tout espace préhilbertien séparable de dimension infinie.

Preuve : Soit H un espace préhilbertien séparable de dimension infinie et (e_n) une base hilbertienne dénombrable de H (cela existe, d'après 8.4.8). Considérons alors l'application linéaire $\varphi : H \longrightarrow l^2$ définie par $\varphi(x) = \hat{x}$ où $\hat{x}$ est la suite $(< x, e_n >)$. Grâce à l'égalité de Parseval-Bessel (voir 8.4.2), on sait que cette application φ est bien définie (car $\hat{x} \in l^2$) et que c'est une isométrie. Il reste donc à vérifier que $\varphi(H)$ est dense dans l^2. Pour cela, on remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(e_n) = \epsilon_n$ où (ϵ_n) est la base hilbertienne canonique de l^2 définie dans 8.3.7 (en effet, $\varphi(e_k) = (< e_k, e_n >)$ est la suite dont tous les termes sont nuls sauf $< e_k, e_k >= ||e_k||^2 = 1$) ; il en résulte que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = Vect(\{\epsilon_n \mid n \in \mathbb{N}\}) = \varphi(Vect(\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\})) \subset \varphi(H)$, si bien que $\varphi(H)$ est dense dans l^2, puisque c'est le cas de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ (voir 7.2.5). □

8.4.12 Théorème : Tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie est isométriquement isomorphe à l'espace l^2.

Preuve : Cela résulte de l'unicité, à isomorphisme isométrique près, du complété hilbertien d'un espace préhilbertien, puisque (H, id) et (l^2, φ) sont tous deux des complétés hilbertiens de l'espace de Hilbert H (voir 8.2.5 et 8.4.11) ; l'isométrie linéaire $\varphi : H \longrightarrow l^2 : x \mapsto \hat{x}$ est donc ici un isomorphisme isométrique. □

8.4.13 Corollaire : Si (e_n) est une base hilbertienne d'un espace de Hilbert H, alors, pour tout $a = (a_n) \in l^2$, la série $\sum a_n e_n$ est convergente et sa somme $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$ vérifie $< x, e_n >= a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve : Par hypothèse, l'espace H est séparable (voir 8.4.8) ; on peut donc utiliser l'isomorphisme isométrique $\varphi : H \longrightarrow l^2$ de 8.4.12. Soit $a = (a_n) \in l^2$ et $x = \varphi^{-1}(a)$; alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $< x, e_n >=< \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(\epsilon_n) >=$ $< a, \epsilon_n >= a_n$. Il reste donc à utiliser 8.4.2 pour conclure. □

8.4.14 Exemple *(en exercice)* : Le résultat de 8.4.13 n'est pas vrai si H n'est pas complet.

8.4.15 Remarques *(en exercices)* : Dans le cas d'un espace préhilbertien séparable de dimension infinie H, on a vu dans 8.4.11 que l'égalité de Parseval-Bessel de 8.4.2 se traduit par le fait que l'application linéaire $\varphi : H \longrightarrow l^2 : x \mapsto \hat{x}$ est une isométrie; d'après 1.6.11, cette égalité est donc équivalente au fait que φ conserve le produit scalaire, *i.e.* que, pour tout $x, y \in H$, on a l'égalité $< x, y >= \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ où $x_n =< x, e_n >$ et $y_n =< y, e_n >$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans le cas où H est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, l'application $\varphi : H \longrightarrow l^2$ citée ci-dessus est un isomorphisme isométrique (voir 8.4.12) ; c'est une généralisation, en dimension infinie, de l'isomorphisme isométrique $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto (< x, e_1 >, \cdots, < x, e_n >)$, mentionné dans 1.6.12 pour un espace euclidien E de dimension n.

Les résultats de cette section sont encore vrais pour les espaces préhilbertiens de dimension infinie munis d'une base hilbertienne dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexée par $\mathbb{Z}$: on ne sort en effet pas du cadre de cette section puisque, dans 7.3.6, on a défini une série $\sum_{\mathbb{Z}} x_n$. indexée par $\mathbb{Z}$, comme étant la série $\sum \tilde{x}_n$, indexée par $\mathbb{N}$, où $(\tilde{x}_n)$ est la suite $(x_0, x_{-1}, x_1, x_{-2}, x_2, \ldots, x_{-n}, x_n, \ldots)$; l'espace hilbertien $l^2(\mathbb{Z})$ (voir 7.3.8), muni de sa base hilbertienne canonique $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par $\epsilon_{nk} = 1$ ou 0 selon que $n = k$ ou non, remplaçant alors l^2. En particulier, on a une isométrie linéaire $\varphi : H \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}) : x \mapsto (< x, e_n >)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui vérifie $\varphi(e_n) = \epsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et qui est un isomorphisme isométrique lorsque H est hilbertien.

On peut aussi généraliser les résultats de cette section aux espaces préhilbertiens de dimension infinie, munis d'une base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ indexée par un ensemble infini I quelconque, la notion de famille sommable remplaçant alors celle de série convergente, indexée par $\mathbb{N}$ (voir 7.3.9 et [3]). L'espace hilbertien $l^2(I)$ (voir 7.3.9), muni de sa base hilbertienne canonique : $(\epsilon_i)_{i\in I}$, où $\epsilon_{ij} = 1$ ou 0 selon que $i = j$ ou non, remplaçant encore l^2. En particulier, on a une isométrie linéaire $\varphi : H \longrightarrow l^2(I) : x \mapsto (< x, e_i >)_{i\in I}$ qui vérifie $\varphi(e_i) = \epsilon_i$ pour tout $i \in I$, et qui est un isomorphisme isométrique lorsque H est hilbertien.

On a les résultats suivants (voir [3]) :

- Toutes les bases hilbertiennes d'un espace de Hilbert ont le même cardinal (appelé la *dimension hilbertienne* de l'espace).

- Les espaces $l^2(I)$ et $l^2(J)$ sont isométriquement isomorphes ssi I et J ont même cardinal.

- $l^2(I)$ n'est pas séparable lorsque I est de cardinal infini non dénombrable.

On peut déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas de base orthonormée dans un espace de Hilbert de dimension infinie (il peut cependant en exister dans les espaces préhilbertiens de dimension infinie ; c'est par exemple le cas de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ou de l'espace des fonctions polynomiales sur $[0,1]$: voir 8.3.7).

On a vu que les bases hilbertiennes permettent de décrire des propriétés algébriques essentielles des espaces de Hilbert, et heureusement, elles, elles existent toujours (voir 8.3.6).

5. SERIES DE FOURIER

Dans ce chapitre, contrairement à ce qui précède, nous nous intéresserons à des fonctions à valeurs complexes. On notera $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel formé des fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont μ-continues par morceaux (*i.e.* qui sont continues par morceaux, et qui vérifient $f(x) = (f(x^-)+f(x^+))/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), et qui sont 2π-périodiques. Rappelons que toute fonction $f \in C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est entièrement déterminée par sa restriction à $]0,2\pi[$; voir 0.4.5, 0.4.6, 0.4.7 et 0.4.8.

8.5.1 Proposition : L'espace $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est un espace préhilbertien complexe non complet pour le produit scalaire $< f,g >= (1/2\pi)\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.

<u>Preuve</u> : D'abord, l'intégrale proposée a bien un sens sur l'espace $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (voir 0.4.8). En fait, ici, on a affaire à une notion plus générale de produit scalaire à valeurs complexes qui vérifie $< f,g >= \overline{< g,f >}$ pour tout $f,g \in C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (on dit que ce produit scalaire est linéaire en la première variable et anti-linéaire en la seconde) ; attention, ici, $||f||^2 = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} |f(x)|^2dx$, où $|f(x)|$ est le module du complexe $f(x)$. L'espace $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ a été choisi *ad hoc* pour que ce produit scalaire soit défini positif (voir la proposition de 0.4.7).

Pour voir que cet espace n'est pas complet, il suffit, puisque $C^{\mu}_{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ sont isométriquement isomorphes (voir 8.5.2), de raisonner avec la période 1 (alors $< f,g >= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$; donc, restreint aux fonctions réelles continues sur $[0,1]$, il est égal au produit scalaire de $C([0,1],\mathbb{R})$ dont la norme associée est la norme $|| \ ||_2$). On considère alors la suite de fonctions (réelles, donc de $C^{\mu}_{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$) définies, sur $]0,1[$ (voir 0.4.7), par $g_n(x) = n$ ou $x^{-1/3}$ selon que $0 < x \leq 1/n^3$ ou $1/n^3 \leq x < 1$; on a vu dans 6.3.6 que son prolongement continu à $[0,1]$ est une suite de Cauchy pour la norme $|| \ ||_2$; son prolongement à $\mathbb{R}$, 1-périodique et μ-continu par morceaux (en posant $g_n(0) = g_n(1) = (n+1)/2$) est donc une suite de Cauchy dans $C^{\mu}_{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; cette suite ne peut converger vers une fonction $g \in C^{\mu}_{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, puisqu'une telle fonction est bornée sur $[0,1]$ (voir 0.4.5 et 0.4.8) : on raisonne donc comme dans 6.3.6. □

8.5.2 <u>Exemples</u> (*en exercices*) : Pour tout réel $T > 0$, l'espace $C^{\mu}_{(T)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, des fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont μ-continues par morceaux et T-périodiques, est un espace préhilbertien non complet, qui est isométriquement isomorphe à $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$;

son produit scalaire étant $< f, g > = (1/T)\int_0^T f(x)\overline{g(x)}dx$.

De plus, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $f, g \in C^{\mu}_{(T)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a $< f, g > = (1/T)\int_a^{a+T} f(x)\overline{g(x)}dx$ (qui résulte du fait que l'on a $\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $f \in C^{\mu}_{(T)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$).

8.5.3 Proposition : L'espace *Trig* des polynômes trigonométriques (voir 6.1.12) est dense dans l'espace préhilbertien $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ considéré dans 8.5.1.

Preuve : Utilisant 6.1.12, on sait que *Trig* est dense, pour la norme de la convergence uniforme, dans le sous-espace $C_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, formé des fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont continues et 2π-périodiques ; *Trig* est donc *a fortiori* dense dans $C_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour la norme associée au produit scalaire de $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ défini dans 8.5.1, puisque cette norme vérifie : $||f|| = \sqrt{(1/2\pi)\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx} \leq \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)| = ||f||_{\infty}$ pour tout $f \in C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Il reste donc à prouver que cet espace $C_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est lui-même dense dans $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Soit donc $h \in C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$; on suppose que h ne possède qu'un seul point de discontinuité a dans $[-\pi, \pi]$ (on généralise facilement au cas où il y en a plusieurs) ; on peut même supposer que $a = 0$: sinon, on se place dans $[a-\pi, a+\pi]$ (voir 8.5.2). Considérons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $h_n : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie (en posant $a_n = h(-1/n)$ et $b_n = h(1/n)$), par $h_n(x) = h(x)$ ou $(n(b_n - a_n)x + (b_n + a_n))/2$, selon que $x \in [-\pi, -1/n] \cup [1/n, \pi]$ ou $x \in [-1/n, 1/n]$; on voit facilement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, h_n est définie et continue sur $[-\pi, \pi]$: h_n est égale à h sur $[-\pi, -1/n] \cup [1/n, \pi]$ et affine sur $[-1/n, 1/n]$. De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-1/n, 1/n]$ on a : $|h(x) - h_n(x)| \leq |h(x)| + |h_n(x)| \leq |h(x)| + (|b_n - a_n| + |b_n + a_n|)/2 \leq |h(x)| + |b_n| + |a_n| \leq 3\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |h(x)|$, on en déduit que $2\pi||h - h_n||^2 = \int_{-1/n}^{1/n} |h(x) - h_n(x)|^2 dx \leq 2(3\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |h(x)|)^2/n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Ainsi, une fois prolongées par périodicité toutes ces fonctions h_n à $\mathbb{R}$ tout entier (elles restent continues sur $\mathbb{R}$ puisque h est continue en π ; ce sont donc des éléments de $C_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$), on voit que $h_n \rightarrow h$ dans $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$; ce qui prouve que $C_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est bien dense dans $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. □

8.5.4 Proposition : On considère, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $e_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $e_n(x) = e^{inx}$; alors la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de l'espace préhilbertien $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Preuve : D'abord, chaque fonction e_n étant continue et 2π-périodique, est un élément de l'espace $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée puisque, pour $n, m \in \mathbb{Z}$, on a $< e_n, e_m > = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}dx = 1$ ou 0 selon que $n = m$ ou non ; de plus, comme, par définition (voir 6.1.12), $Trig = Vect_{\mathbb{C}}(\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\})$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les e_n, on en déduit, d'après 8.5.3, que l'ensemble $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est total dans $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. D'où le résultat. □

8.5.5 Remarque : En s'inspirant de 8.4.11, ou plutôt de 8.4.15 puisqu'ici on a une base hilbertienne indexée par $\mathbb{Z}$, on voit que l'espace $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ des familles de complexes $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$ (*i.e.* telles que $(|c_n|)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ ... voir 7.3.7) est un complété hilbertien (pour le produit scalaire $< (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (c'_n)_{n\in\mathbb{Z}} > = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\overline{c'_n}$) de $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, et donc de tous

les $C^{\mu}_{(T)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, d'après 8.5.2. En fait, il en est de même de l'espace $l^2_c(\mathbb{N}) = l^2_{\mathbb{C}}$, puisque ce dernier est isomorphe isométriquement à $l^2_c(\mathbb{Z})$ (voir 7.3.8 dans le cas réel).

8.5.6 Proposition : Pour tout $f \in C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on pose $c_n(f) = < f, e_n >$. Alors (voir 7.3.6) les séries $\sum_{\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ et $\sum_{\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ convergent respectivement dans $\mathbb{R}$ et $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, et l'on a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = ||f||^2$ et $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e_n = f$.

<u>Preuve</u> : La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ étant une base hilbertienne de l'espace préhilbertien $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, il en est de même de la suite $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (voir 7.3.6 pour la notation), puisque $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{\widetilde{e}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On peut donc appliquer 8.4.2 avec cette base hilbertienne $(\widetilde{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

8.5.7 <u>Remarque</u> : On a vu, dans 8.5.6, que, pour tout $f \in C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, la série $\sum_{\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ converge dans $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et a pour somme f ; on a donc $||f - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k|| \to 0$. Rappelons que la convergence en norme n'implique pas la convergence simple, *i.e.* que l'on n'a pas forcément $f(x) = \lim \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{inx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: voir dans 2.1.21 l'exemple d'une suite (h_n) dans $C([0,1],\mathbb{R})$ qui converge pour la norme $|| \; ||_2$ mais pas simplement ; le prolongement 1-périodique de la restriction de cette suite à $]0,1[$ (en posant alors $h_n(0) = (h_n(0^+) + h_n(1^-))/2 = 1/2$) fournit donc un exemple d'une suite qui converge dans $C^{\mu}_{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ mais pas simplement.

C'est pourtant la convergence simple qui nous permet d'obtenir des résultats numériques très intéressants, comme, par exemple, les calculs de certaines sommes de séries de Riemann convergentes (voir 8.5.15). On s'intéresse donc, dans ce qui suit, à établir des conditions suffisantes sur $f \in C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ pour obtenir une telle convergence simple. C'est le cas par exemple lorsque la série $\sum_{\mathbb{Z}} |c_n(f)|$ converge (voir 8.5.9), ou lorsque l'on suppose que f est réelle et qu'elle possède une dérivée à droite et à gauche en tout point (voir 8.5.13). Toujours dans le cas réel, on a des théorèmes très efficaces (voir 8.5.10 et 8.5.12) de dérivation (resp. d'intégration) termes à termes de séries de Fourier de fonctions 2π-périodiques et μ-C^1 par morceaux (resp. et μ-continue par morceaux) ; ces théorèmes nous permettent de calculer bien d'autres sommes de séries numériques convergentes (voir 8.5.15).

8.5.8 Définitions : Pour $f \in C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, les $c_n(f) = < f, e_n >$ sont les *coefficients de Fourier* de f ; on a $c_n(f) \to 0$ quand $|n| \to +\infty$, puisque la série $\sum_{\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ converge (voir 7.3.7 et 8.5.6). La série de fonctions $\sum_{\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ s'appelle la *série de Fourier de f* ; la somme, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e_n$, (au sens de la norme $|| \; ||$ associée au produit scalaire) de cette série de Fourier est un élément de $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$: plus précisément, c'est la fonction f (voir 8.5.6). Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on désignera la série numérique $\sum_{\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ sous le nom de *série de Fourier de f en x*. Enfin, notons $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid$ la série $\sum_{\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ converge$\}$ et $S^f : D_f \longrightarrow \mathbb{C}$, la fonction définie par $S^f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{inx}$; $S^f(x)$ est donc la somme de la série de Fourier $\sum_{\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ de f en x (qui converge puisque $x \in D_f$).

8.5.9 Proposition : Soit $f \in C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| < +\infty$ (*i.e.* telle que la série $\sum_{\mathbb{Z}} |c_n(f)|$ converge dans $\mathbb{R}$: voir 7.3.7). Alors la série de

Fourier de f converge normalement ; par suite, f est continue, $D_f = \mathbb{R}$ et l'on a $S^f(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

<u>Preuve</u> : On utilise les théorèmes habituels sur les séries de fonctions indexées par $\mathbb{N}$ puisque toute série indexée par $\mathbb{Z}$ s'apparente à une série indexée par $\mathbb{N}$ (voir 7.3.6). La série de fonctions $\sum_{\mathbb{Z}} c_n(f)\mathrm{e}_n$ converge normalement (donc uniformément) puisque, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|c_n(f)e^{inx}| = |c_n(f)|\,|e^{inx}| = |c_n(f)|$. Comme chaque fonction e_n est continue, on en déduit que la somme de cette série est continue ; or, d'après 8.5.6, cette somme est f (car, comme on l'a signalé dans la preuve de 8.5.3, la convergence uniforme implique la convergence dans $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$). D'où le résultat puisque la convergence uniforme implique aussi la convergence simple. □

8.5.10 Proposition : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction μ-C^1 par morceaux (voir 0.4.6) 2π-périodique ; on note, comme dans 0.4.6, f' sa quasi-dérivée. Alors $f \in C_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f' \in C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifient les propriétés suivantes : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f') = inc_n(f)$; $c_n(f) = o(1/n)$ quand $|n| \to +\infty$; la série de Fourier de f converge normalement, et la série de Fourier de f' s'obtient en dérivant termes à termes celle de f.

<u>Preuve</u> : Par définition, f est continue (voir 0.4.6) ; on a vu dans 0.4.7 que f' est aussi 2π-périodique ; ainsi $f \in C_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f' \in C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f') = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}dx = (1/2\pi)\big([f(x)e^{-inx}]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx\big) = inc_n(f)$; la formule d'intégration par parties est possible ici car f et l'exponentielle sont des fonctions μ-C^1 par morceaux (voir 0.4.6) ; on a donc $c_n(f) = o(1/n)$ quand $|n| \to +\infty$ (puisque $c_n(f') \to 0$ quand $|n| \to +\infty$: voir 8.5.8). La convergence normale de la série de Fourier de f résulte alors de l'inégalité suivante (obtenue grâce à l'inégalité de Schwarz dans l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{Z})$; voir 7.3.8), vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sum_{n\neq 0}|c_n(f)e^{inx}| = \sum_{n\neq 0}|c_n(f)| = \sum_{n\neq 0}|(1/in)c_n(f')| = \sum_{n\neq 0}|1/n|\,|c_n(f')| \leq \sqrt{\sum_{n\neq 0}|1/n|^2}\sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n(f')|^2} < +\infty$, puisque la série $\sum_{\mathbb{Z}}|c_n(f')|^2$ converge (voir 8.5.6). De plus, on a $\sum_{\mathbb{Z}} c_n(f')\mathrm{e}_n = \sum_{\mathbb{Z}} inc_n(f)\mathrm{e}_n = \sum_{\mathbb{Z}}\big(c_n(f)\mathrm{e}_n\big)'$. □

8.5.11 Corollaire : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique de classe C^p ; alors $c_n(f) = o(1/n^p)$ lorsque $|n| \to +\infty$ et, pour tout $k = 0, \ldots, p-1$, la série de Fourier de $f^{(k)}$ converge normalement, et, pour tout $k = 1, \ldots, p$, les séries de Fourier des $f^{(k)}$ s'obtiennent par des dérivations termes à termes successives.

<u>Preuve</u> : Il suffit d'appliquer 8.5.10 successivement à f et à ses dérivées f', f'', ..., $f^{(p-1)}$. □

8.5.12 Proposition : Soit $f \in C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$; posons $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors F est une fonction μ-C^1 par morceaux 2π-périodique, donc un élément de $C_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, dont la série de Fourier est normalement convergente et s'obtient en intégrant termes à termes celle de f (avec une constante d'intégration égale à $c_0(F)$).

<u>Preuve</u> : Par construction, F est une primitive de f (c'est celle qui s'annule en $x = 0$; voir 0.4.5 et 0.4.6), elle est donc μ-C^1 par morceaux (voir 0.4.6). *A priori*, F n'est pas forcément 2π-périodique (voir 0.4.7) ; cependant, ici, les hypothèses sur

f impliquant que $\int_a^{a+2\pi} f(x)dx = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ (voir 8.5.2), on a $F(a+2\pi) = F(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$; F est donc bien 2π-périodique. On peut alors appliquer 8.5.10 à F et f (au lieu de f et f') : la série de Fourier de F converge normalement et la série de Fourier de f (dont le terme constant $c_0(f)$ est nul par hypothèse) s'obtient en dérivant termes à termes la série de Fourier de F. □

8.5.13 Théorème (de Dirichlet) : Soit $f \in \mathcal{C}^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$ en lequel f possède des dérivées à gauche et à droite (voir 0.4.2) ; alors la série de Fourier de f en x, $\sum_{\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$, converge et a pour somme $S^f(x) = f(x)$. En particulier, la série de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{C}^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui possède en tout point des dérivées à gauche et à droite, converge simplement vers f (*i.e.* $D_f = \mathbb{R}$ et $S^f = f$).

Preuve : Voir [3]. □

8.5.14 Remarque : Habituellement, le théorème de Dirichlet s'énonce ainsi, pour une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et 2π-périodique : en tout point $x \in \mathbb{R}$ où f possède des dérivées à gauche et à droite, la série de Fourier de f en x converge et a pour somme $(f(x^-) + f(x^+))/2$ (qui est égale à $f(x)$ lorsque f est continue au point x). Notre choix de nous restreindre aux fonctions μ-continues par morceaux et 2π-périodiques présente l'avantage non négligeable, non seulement de disposer d'un vrai produit scalaire sur $\mathcal{C}^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sans passer par un quotient (qui identifierait deux fonctions continues par morceaux qui ne diffèrent que par leurs valeurs en leurs points de discontinuité ; voir 0.1.4, 0.4.6 et 8.5.1), mais aussi d'avoir un énoncé du théorème de Dirichlet particulièrement simple.

8.5.15 Exemples (*en exercices*) : Dans le cas où $f \in \mathcal{C}^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$ et $2c_n(f) = a_n(f) - ib_n(f)$, où $a_n(f) = (1/\pi)\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx$ et $b_n(f) = (1/\pi)\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx$. Ainsi, $b_0(f) = 0$ et $c_0(f) = a_0(f)/2$; $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si f est paire ; $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si f est impaire. On a donc $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = (a_0(f))^2/4 + (1/2)\sum_{n=1}^{\infty}((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2)$. De plus, la série de Fourier de f en x est réelle et, lorsqu'elle converge, sa somme s'écrit $S^f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{inx} = a_0(f)/2 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx\big)$. Sous les hypothèses et les notations de 8.5.10, on a $a_n(f') = nb_n(f)$ et $b_n(f') = -na_n(f)$.

La série de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie, sur $[-\pi, \pi]$, par $f(x) = |x|$, converge-t-elle normalement ? Calculer $S^f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(2n+1)^2 = \pi^2/8$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$ et $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(2n+1)^4 = \pi^4/96$.

La série de Fourier de la fonction 2π-périodique g définie, sur $]-\pi, \pi]$, par $g(0) = g(\pi) = 0$ et $g(x) = -1$ ou $+1$ selon que $-\pi < x < 0$ ou $0 < x < \pi$, converge-t-elle uniformément ? simplement ? Calculer $S^g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et montrer que $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/(2n+1) = \pi/4$.

Trouver les solutions 2π-périodiques réelles de l'équation différentielle $y - y'' = \cos x \cos 2x$.

Chapitre IX
LES ESPACES METRIQUES CONNEXES

1. ENSEMBLES CONVEXES

9.1.1 Définitions : Soit E un espace vectoriel et a, b deux points de E. On note $[a, b]$ le *segment de a vers b*, *i.e.* l'ensemble suivant : $\{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\}$; en fait $[a, b] = f([0, 1])$, où f est l'application $\mathbb{R} \longrightarrow E$ définie par $f(t) = a + t(b - a)$, appelée *chemin affine d'origine a et d'extrémité b*.

On dit qu'une partie A de E est *convexe* si, pour tout $a, b \in A$, on a $[a, b] \subset A$.

9.1.2 Proposition : Soit E et F deux espaces vectoriels, $f : E \longrightarrow F$ une application affine (*i.e.* $f = u + c$, où $u : E \longrightarrow F$ est linéaire et $c \in F$; voir 0.3.2), A une partie convexe de E et B une partie convexe de F. Alors l'image $f(A)$ et l'image réciproque $\overset{-1}{f}(B)$ sont des parties convexes de F et E respectivement.

<u>Preuve</u> : Montrons d'abord que l'application affine f vérifie l'égalité $f([a, b]) \overset{\star}{=} [f(a), f(b)]$ pour tout $a, b \in E$. En effet, pour tout réel t, on a $f(a + t(b - a)) = u(a+t(b-a))+c = u(a)+t(u(b)-u(a))+c = (u(a)+c)+t((u(b)+c)-(u(a)+c)) = f(a) + t(f(b) - f(a))$; il suffit donc de se limiter à des $t \in [0, 1]$ pour obtenir l'égalité $\overset{\star}{=}$. Par suite, si $f(a), f(b) \in f(A)$ avec $a, b \in A$, on a $[a, b] \subset A$ (puisque A est convexe) et donc aussi $[f(a), f(b)] = f([a, b]) \subset f(A)$; ainsi, $f(A)$ est convexe. Maintenant, si $a, b \in \overset{-1}{f}(B)$, *i.e.* si $f(a), f(b) \in B$, on a $f([a, b]) = [f(a), f(b)]) \subset B$ (puisque B est convexe), ou encore $[a, b] \subset \overset{-1}{f}(B)$; ainsi, $\overset{-1}{f}(B)$ est convexe. □

9.1.3 Proposition : Dans un e.v.n., les boules sont convexes, alors que les sphères et les complémentaires de boules ne le sont pas.

<u>Preuve</u> : Soit E un e.v.n., $a \in E$ et $r > 0$; considérons l'application $h : E \longrightarrow E : x \mapsto rx + a$. C'est une bijection affine (avec $h^{-1}(x) = (1/r)(x - a)$) qui vérifie $h(B(0, 1)) = B(a, r)$, $h(B'(0, 1)) = B'(a, r)$ et $h(S(0, 1)) = S(a, r)$, la sphère centrée en a et de rayon r. Utilisant alors 9.1.2, il suffit de prouver cette proposition 9.1.3 pour les boules $B(0, 1)$, $B'(0, 1)$ et la sphère $S(0, 1) = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$.

Soit a, b deux points de $B(0, 1)$; montrons que $[a, b] \subset B(0, 1)$, *i.e.* que l'on a $a + t(b - a) \in B(0, 1)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Or $\|a + t(b - a)\| = \|(1 - t)a + tb)\| \leq (1 - t)\|a\| + t\|b\| < (1 - t) + t = 1$. Le raisonnement est identique pour la boule fermée, en remplaçant les $<$ par des $\leq$.

Bien sûr, $S(0, 1)$, $(B(0, 1))^c$ et $(B'(0, 1))^c$ ne sont pas convexes ; en effet, si A est l'une de ces parties et si $x \in A$, on a $-x \in A$ et $[-x, x] \not\subset A$ (car $0 \in [-x, x]$ et $0 \notin A$). □

9.1.4 Exemples (*en exercices*) : Tout sous-espace affine (*i.e.* tout translaté d'un sous-espace vectoriel) est convexe. En particulier, tout espace vectoriel est convexe.

Dans $\mathbb{R}$, les segments sont les intervalles fermés bornés, et les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (voir 0.2.5). Tout segment d'un espace vectoriel est convexe.

Les parties convexes sont stables par intersections ; donner un exemple de deux parties convexes dont la réunion ne l'est pas.

Donner une partie convexe A de $\mathbb{R}$ et une application continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telles que $f(A)$ ne soit pas convexe.

2. ESPACES METRIQUES CONNEXES PAR ARCS

Dorénavant, E est un espace métrique et l'intervalle $[0,1]$ est muni de sa distance usuelle.

9.2.1 Définiton : On dit que E est *connexe par arcs* si, pour tout $a, b \in E$, il existe une application continue $f : [0,1] \longrightarrow E$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$ (on dit que f est un *chemin, dans E, d'origine a et d'extrémité b* (ou *chemin de a vers b dans E*), ce que l'on notera $f : a \rightsquigarrow b$). Une partie de E sera dite connexe par arcs si elle l'est en tant que sous-espace.

9.2.2 Proposition : Dans un e.v.n., toute partie convexe est connexe par arcs.

Preuve : Soit A une partie convexe d'un e.v.n. et a, b deux points de A ; par hypothèse, on a $[a,b] \subset A$, *i.e.* il existe une application affine $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$: $t \mapsto a + t(b-a)$ vérifiant (voir 9.1.1) : $f(0) = a$, $f(1) = b$ et $f([0,1]) = [a,b] \subset A$. Il suffit donc d'utiliser le fait que toute application affine de $\mathbb{R}$ dans E est continue (car toute application linéaire de $\mathbb{R}$ dans E est continue : voir 5.1.29). □

9.2.3 Proposition : Soit A une partie de $\mathbb{R}$ (muni de sa distance usuelle). On a les équivalences : A est connexe par arcs $\Longleftrightarrow$ A est convexe $\Longleftrightarrow$ A est un intervalle.

Preuve : Vu 9.1.4 et 9.2.2, il suffit de prouver que, si A est connexe par arcs, alors A est convexe. Supposons donc que A est connexe par arcs, et soit $a, b \in A$; on doit prouver que $[a,b] \subset A$. Par hypothèse, il existe un chemin $f : a \rightsquigarrow b$ dans A, *i.e.* une application continue $f : [0,1] \longrightarrow A$ vérifiant $f(0) = a$ et $f(1) = b$. L'intervalle $[0,1]$ étant compact, f est bornée et atteint ses bornes sur $[0,1]$ (voir 5.1.20), *i.e.* il existe deux points x_0 et x_1 de $[0,1]$ tels que $f(x_0) = \inf_{x \in [0,1]} f(x)$ et $f(x_1) = \sup_{x \in [0,1]} f(x)$. Montrons que $f([0,1]) = [f(x_0), f(x_1)]$. L'inclusion $f([0,1]) \subset [f(x_0), f(x_1)]$ allant de soi (vue la définition de x_0 et x_1), on doit seulement vérifier l'inclusion inverse : soit donc y un réel vérifiant $f(x_0) \leq y \leq f(x_1)$; f étant continue sur $[0,1]$, il existe un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = y$ (voir le théorème des valeurs intermédiaires dans 0.4.1) ; ainsi $y \in f([0,1])$. Par suite, on a $[a,b] = [f(0), f(1)] \subset [f(x_0), f(x_1)] = f([0,1]) \subset A$. □

9.2.4 Proposition : E est connexe par arcs ssi, pour tout $a, b \in E$, il existe une partie connexe par arcs C de E telle que $a, b \in C$.

Preuve : Si E est connexe par arcs, on prend $C = E$ pour tout $a, b \in E$. Inversement, soit $a, b \in E$; par hypothèse, ils sont contenus dans une partie connexe par arcs C de E, de sorte qu'il existe un chemin $a \rightsquigarrow b$ dans C, et donc dans E. □

9.2.5 Proposition : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, où F est un autre espace métrique. Si f est continue et si E est connexe par arcs, alors l'image $f(E)$ est connexe par arcs. En particulier, si E et F sont homéomorphes, alors E est connexe par arcs ssi F est connexe par arcs.

Preuve : Soit $f(a)$ et $f(b)$ deux points de $f(E)$; trouvons un chemin $f(a) \rightsquigarrow f(b)$ dans $f(E)$. L'espace E étant connexe par arcs, il existe un chemin $g : a \rightsquigarrow b$ dans E, *i.e.* une application continue $g : [0,1] \longrightarrow E$ vérifiant $g(0) = a$ et $g(1) = b$. L'application continue $f \circ g : [0,1] \longrightarrow f(E)$ répond alors à la question. Si E et F sont homéomorphes, on dispose d'une bijection bicontinue $f : E \longrightarrow F$. On applique donc ce qui précède à f et f^{-1}. □

9.2.6 Corollaire (Théorème des valeurs intermédiaires) : Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, où E est supposé connexe par arcs. Alors $f(E)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$; c'est en particulier vrai si E est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Preuve : Résulte de 9.2.3 et 9.2.5. □

9.2.7 Proposition : Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces connexes par arcs de E dont l'intersection est non vide ; alors la réunion des C_i est connexe par arcs.

Preuve : Montrons le d'abord pour deux connexes par arcs C_1 et C_2 vérifiant $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Soit $a, b \in C_1 \cup C_2$; on doit trouver un chemin $f : a \rightsquigarrow b$ dans $C_1 \cup C_2$. Si a et b sont dans le même C_i, c'est évident ; sinon supposons que $a \in C_1$ et $b \in C_2$. Considérons c un point de $C_1 \cap C_2$ (un tel point existe bien par hypothèse). On a donc $a, c \in C_1$; C_1 étant supposé connexe par arcs, on sait qu'il existe un chemin $f_1 : a \rightsquigarrow c$ dans C_1 ; pour une raison analogue, il existe un chemin $f_2 : c \rightsquigarrow b$ dans C_2. Définissons alors l'application $f : [0,1] \longrightarrow E$ par $f(t) = f_1(2t)$ ou $f_2(2t-1)$, selon que $t \in [0, 1/2]$ ou $t \in [1/2, 1]$ (l'application f est bien définie, puisque $f_1(1) = f_2(0) = c$). Alors f vérifie $f(0) = f_1(0) = a$ et $f(1) = f_2(1) = b$ et $f([0,1]) \subset C_1 \cup C_2$ (en effet, on a $f(t) \in C_1$ pour tout $t \in [0, 1/2]$ et $f(t) \in C_2$ pour tout $t \in [1/2, 1]$) ; il reste à remarquer que f est continue (on applique 4.3.14 avec le recouvrement fermé $[0,1] = [0,1/2] \cup [1/2,1]$, les restrictions de f à $[0,1/2]$ et à $[1/2,1]$ étant les applications continues $t \mapsto f_1(2t)$ et $t \mapsto f_2(2t-1)$). Par suite, f répond à la question.

Si l'on considère maintenant une famille $(C_i)_{i \in I}$ de connexes par arcs dont l'intersection est non vide, et si a et b sont deux points de $\bigcup_{i \in I} C_i$, il existe $i, j \in I$ tels que $a \in C_i$ et $b \in C_j$; Comme $\bigcap_{i \in I} C_i \subset C_i \cap C_j$, on a $C_i \cap C_j \neq \emptyset$. Ce qui précède nous autorise à dire que $C_i \cup C_j$ est un connexe par arcs de $\bigcup_{i \in I} C_i$ qui contient a et b, et donc (voir 9.2.4) que $\bigcup_{i \in I} C_i$ est lui-même connexe par arcs. □

9.2.8 Corollaire : Soit $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces connexes par arcs d'un espace métrique vérifiant $C_k \cap C_{k+1} \neq \emptyset$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; alors $\bigcup_n C_n$ est connexe par arcs.

Preuve : On le prouve par récurrence en utilisant 9.2.7. $C_0 \cup C_1$ est connexe par arcs comme réunion de deux connexes par arcs d'intersection non vide. Supposons que $C_0 \cup \ldots \cup C_{n-1}$ soit connexe par arcs ; il en résulte que $C_0 \cup \ldots \cup C_n = (C_0 \cup \ldots \cup C_{n-1}) \cup C_n$ est aussi connexe par arcs comme réunion des connexes par arcs $C_0 \cup \ldots \cup C_{n-1}$ et C_n qui sont d'intersection non vide (puisque $C_{n-1} \cap C_n \neq \emptyset$ et $(C_{n-1} \cap C_n) \subset (C_0 \cap C_n) \cup \ldots \cup (C_{n-1} \cap C_n) = (C_0 \cup \ldots \cup C_{n-1}) \cap C_n$). □

9.2.9 Proposition : Soit E un e.v.n. de dimension ≥ 2 et x un point de E ; alors $E-\{x\}$ est connexe par arcs, ainsi que toutes les sphères et les complémentaires de boules dans E.

Preuve : Prouvons d'abord que $E-\{x\}$ est connexe par arcs. Soit $a, b \in E-\{x\}$; on doit montrer qu'il existe un chemin $a \rightsquigarrow b$ dans $E-\{x\}$, et, pour cela, d'après 9.2.4, il suffit de trouver un connexe par arcs contenant a et b et inclus dans $E-\{x\}$. Si $x \notin [a,b]$, le segment $[a,b]$ est un convexe qui répond à la question ; sinon, soit $c \in E$ tel que c ne soit pas sur la droite $D_{a,b}$ passant par a et b (un tel c existe puisque E est de dimension ≥ 2). Comme $x \notin [a,c]$ et $x \notin [c,b]$ (car $x \in D_{a,b}$ et $c \notin D_{a,b}$), on dispose encore d'un connexe par arcs $[a,c] \cup [c,b]$ (voir 9.2.7) qui est inclus dans $E-\{x\}$ et qui contient a et b.

Utilisant les bijections affines $h : E \longrightarrow E : x \mapsto rx + a$ de 9.1.3, on sait que toutes les sphères de E sont homéomorphes à la sphère $S(0,1)$. Il suffit donc de prouver que $S(0,1)$ est connexe par arcs (voir 9.2.5). Considérons pour cela l'application de Gauss $g : E-\{0\} \longrightarrow E$ définie par $g(x) = x/\|x\|$ pour tout $x \in E-\{0\}$. On remarque que l'on a $g(E-\{0\}) = S(0,1)$ (par définition, pour tout $x \in E-\{0\}$, on a $\|g(x)\| = 1$, d'où l'inclusion $g(E-\{0\}) \subset S(0,1)$; inversement, si $x \in S(0,1)$, on a $x \neq 0$ et $g(x) = x$, de sorte que $x \in g(E-\{0\})$, d'où l'inclusion $S(0,1) \subset g(E-\{0\})$). Utilisant 9.2.5, la connexité par arcs de $S(0,1)$ résultera donc, elle-même, de celle de $E-\{0\}$ et du fait que g est continue (car toute norme est continue (voir 1.6.8) et ne s'annule pas sur $E-\{0\}$).

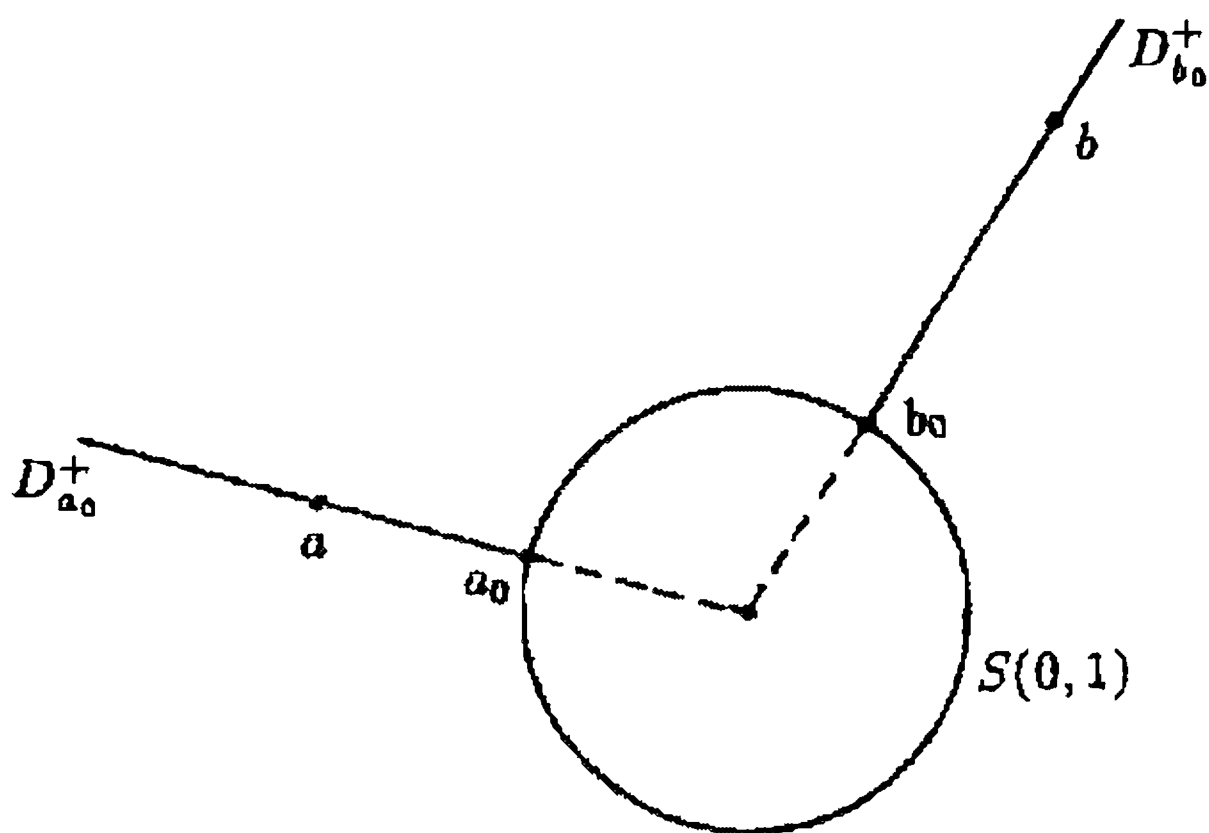


Figure 15 (9.2.9)

Considérons maintenant la boule ouverte $B(0,1)$ (cela suffit, toujours grâce aux bijections affines h) et $a, b \notin B(0,1)$; il s'agit de trouver un connexe par arcs de $B(0,1)^c$ qui contient a et b. Considérons les points de $S(0,1)$ suivants : $a_0 = g(a)$ et $b_0 = g(b)$, ainsi que les demi-droites $D^+_{a_0} = \{\lambda a_0 \mid \lambda \geq 1\} = f_{a_0}([1,+\infty[)$ et $D^+_{b_0} = \{\lambda b_0 \mid \lambda \geq 1\} = f_{b_0}([1,+\infty[)$, où $f_{a_0}, f_{b_0} : \mathbb{R} \longrightarrow E$ sont les applications définies par $f_{a_0}(\lambda) = \lambda a_0$ et $f_{b_0}(\lambda) = \lambda b_0$ (figure 15) ; on applique 9.2.8 aux trois connexes par arcs $D^+_{a_0}$, $S(0,1)$ et $D^+_{b_0}$ (les demi-droites sont même convexes puisque f_{a_0} et f_{b_0} sont linéaires) qui vérifient $D^+_{a_0} \cap S(0,1) \neq \emptyset$ et $S(0,1) \cap D^+_{b_0} \neq \emptyset$ (car $a_0 \in D^+_{a_0} \cap S(0,1)$ et $b_0 \in S(0,1) \cap D^+_{b_0}$) : ainsi, $D^+_{a_0} \cup S(0,1) \cup D^+_{b_0}$ est un connexe par arcs de $B(0,1)^c$ qui contient a et b.

Enfin, soit $a, b \notin B'(0,1)$ et r un réel vérifiant $1 < r \leq \inf(\|a\|, \|b\|)$; on dispose alors, d'après ce qui précède, d'un connexe par arcs $B(0,r)^c$, inclus dans $B'(0,1)^c$ et qui contient a et b. □

9.2.10 Remarques : L'hypothèse que E soit de dimension ≥ 2 est nécessaire : en effet, en dimension 0 on a $E = \{0\}$! Pour la dimension 1, on remarque que $\mathbb{R}-\{x\}$ n'est connexe par arcs pour aucun $x \in \mathbb{R}$ puisque ça n'est pas un intervalle ; d'ailleurs, toujours dans $\mathbb{R}$, $S(0,1) = \{-1, 1\}$, $(B(0,1))^c =]-1,1[^c$ et $(B'(0,1))^c = [-1,1]^c$ ne sont pas non plus des intervalles.

9.2.11 Proposition : Un produit fini d'espaces métriques non vides (muni de l'une des distances produit d_p de 1.1.9) est connexe par arcs ssi chacun de ses facteurs l'est.

Preuve : $\Longrightarrow$: Soit $E_1, \ldots, E_n$ n espaces connexes par arcs, et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux points de $E = E_1 \times \cdots \times E_n$; trouvons un chemin $x \rightsquigarrow y$ dans E. Par hypothèse, pour chaque i, il existe un chemin $f_i : x_i \rightsquigarrow y_i$ dans E_i vérifiant $f_i(0) = x_i$ et $f_i(1) = y_i$. Soit donc $f : [0,1] \longrightarrow E$ l'application définie par $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$. Cette application est continue (puisque ses composantes le sont) et vérifie $f(0) = (f_1(0), \ldots, f_n(0)) = (x_1, \ldots, x_n) = x$ et $f(1) = (f_1(1), \ldots, f_n(1)) = y$; c'est donc un chemin $x \rightsquigarrow y$ dans E.

$\Longleftarrow$: Si $E_1, \ldots, E_n$ sont n espaces métriques non vides tels que $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ soit connexe par arcs. Le fait que les E_i sont connexes par arcs résulte de la continuité des projections et du fait que, puisque les E_i sont non vides, on a $E_i = \pi_i(E)$ pour tout i. □

9.2.12 Exemples (*en exercices*) : Pour les topologies usuelles induites :

Donner plusieurs preuves, différentes de celle donnée dans 9.2.9, du fait que la sphère $\mathbb{S}_2^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ est connexe par arcs ; s'inspirer des preuves précédentes pour voir que la sphère $\mathbb{S}_2^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ (voir 5.3.13) et le cône $\widehat{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ (figure 16) sont aussi connexes par arcs.

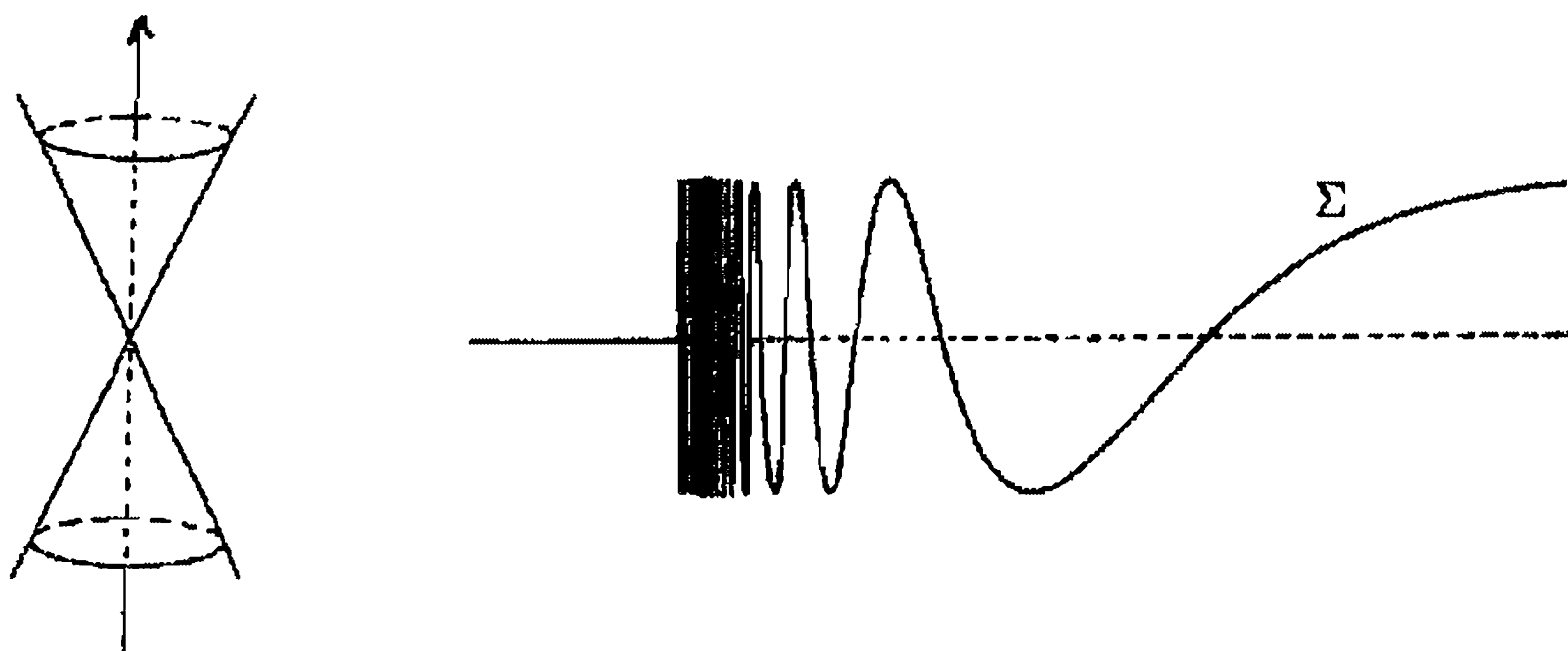


Figure 16 (9.2.12)

Les courbes $\mathbb{S}_2^1 \star \mathbb{S}_2^1$ (définie dans 1.5.11) et X (d'équation $x^2 + y^4 = 1$), l'ellipse El (d'équation $(x^2/4) + y^2 = 1$) et la parabole P (d'équation $y = x^2$), sont connexes par arcs ; il en est de même du cylindre Cyl (d'équation $x^2 + y^2 = 1$),

du tore $\mathbf{T}$ (d'équation $(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2+z^2=r^2$ où $0<r<R$). Par contre, les hyperboles H et H' d'équations respectives $y=1/x$ et $y^2-x^2=1$ ne le sont pas.

Pour $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue, les surfaces $f_{\leq}$, $f_{\geq}$, $f_{<}$ et $f_{>}$ définies dans 4.4.6 sont connexes par arcs.

Pour $f,g:I\longrightarrow\mathbb{R}$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$) vérifiant, pour tout $x\in I$, $f(x)\leq g(x)$ (resp. $f(x)<g(x)$), on pose $[f,g]=\{(x,y)\in I\times\mathbb{R}\mid f(x)\leq y\leq g(x)\}$ (resp. $]f,g[=\{(x,y)\in I\times\mathbb{R}\mid f(x)<y<g(x)\}$). Si f et g sont continues (pour la distance usuelle), alors $[f,g]$ (resp. $]f,g[$) est connexe par arcs.

Donner un exemple d'une intersection de deux connexes par arcs qui ne soit pas connexe par arcs, de l'image réciproque d'un connexe par arcs par une application continue, qui ne soit pas connexe par arcs.

Considérer la fonction $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}:(x,y)\mapsto 2xy$; montrer qu'elle vérifie $f(\mathbf{S}^1_2)=f(B'_2((0,0),1))=[-1,1]$.

Toute bijection continue $E\longrightarrow\mathbb{R}$, où E est connexe par arcs, est un homéomorphisme (voir [1] : 4.3.6). Il en résulte qu'une fonction $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est continue ssi son graphe est connexe par arcs. Donc le graphe Σ_0 de la fonction $\sigma_0:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, définie par $\sigma_0(x)=0$ ou $\sin 1/x$ selon que $x\leq 0$ ou non, n'est pas connexe par arcs.

le graphe Σ de la fonction $\sigma:]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}:x\mapsto\sin 1/x$ (figure 16) est un connexe par arcs dont la fermeture ne l'est pas (car $\overline{\Sigma}=(0\times[-1,1])\cup\Sigma$).

3. ESPACES METRIQUES CONNEXES

9.3.1 Définition : Un espace métrique est dit *connexe* si ses seules parties à la fois ouvertes et fermées sont la partie vide et lui-même, ce qui équivaut à dire que E ne peut s'écrire comme la réunion de deux ouverts (ou de deux fermés) disjoints non vides. Une partie d'un espace métrique sera dite connexe si elle l'est en tant que sous-espace.

9.3.2 Proposition : Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe (pour sa distance usuelle).

Preuve : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Supposons que l'on puisse écrire $I=A\cup B$, où A et B sont des fermés non vides de I ; montrons alors que $A\cap B\neq\emptyset$. Soit $a\in A$ et $b\in B$ (ces points existent puisque A et B sont supposés non vides) ; supposons que l'on ait $a\leq b$ (sinon, on intervertit le rôle de A et B). I étant convexe (c'est un intervalle), on a $[a,b]\subset I$. Comme $A\cap[a,b]$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui est non vide (car $a\in A\cap[a,b]$), majorée (par b) et fermée dans $\mathbb{R}$ (puisque fermé dans $[a,b]$, lui-même fermé dans $\mathbb{R}$), elle possède un plus grand élément c (voir 3.1.18) qui vérifie donc $c\in A$. Montrons que l'on a aussi $c\in B$. Si $c=b$, alors $c\in B$! Sinon, par définition de c, on a $A\cap]c,b]=\emptyset$, *i.e.* $]c,b]\subset B$ (puisque $I=A\cup B$). Mais alors $[c,b]\subset B$, puisque B est fermé, ce qui prouve que $c\in B$. Ainsi, A et B ont bien un point commun : c. □

9.3.3 Proposition : Tout espace métrique connexe par arcs est connexe.

Preuve : Soit E un espace métrique connexe par arcs ; supposons qu'il existe deux ouverts disjoints non vides U et V de E tels que l'on puisse écrire $E=U\cup V$. Soit $a\in U$ et $b\in V$ (de tels points existent puisque U et V sont supposés non vides) ; E étant connexe par arcs, il existe un chemin $f:a\rightsquigarrow b$ dans E, *i.e.* une application continue $f:[0,1]\longrightarrow E$ vérifiant $f(0)=a$ et $f(1)=b$. Mais

alors $\overset{-1}{f}(U)$ et $\overset{-1}{f}(V)$ sont deux ouverts non vides de $[0,1]$ (car f est continue, $0 \in \overset{-1}{f}(U)$ et $1 \in \overset{-1}{f}(V)$) vérifiant $\overset{-1}{f}(U) \cap \overset{-1}{f}(V) = \overset{-1}{f}(U \cap V) = \overset{-1}{f}(\emptyset) = \emptyset$ et $\overset{-1}{f}(U) \cup \overset{-1}{f}(V) = \overset{-1}{f}(U \cup V) = \overset{-1}{f}(E) = [0,1]$, ce qui est en contradiction avec le fait que $[0,1]$ est connexe (voir 9.3.2). De tels ouverts U et V ne peuvent donc exister. □

9.3.4 Remarques : La reciproque de 9.3.3 est fausse (l'adhérence du graphe Σ de la fonction $\sigma :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin 1/x$ est un connexe non connexe par arcs : voir 9.2.12, 9.3.3, 9.3.9 et [1] 4.3.4). Cependant, on a le résultat important suivant :

9.3.5 Théorème : Un ouvert d'un e.v.n. est connexe ssi il est connexe par arcs.

Preuve : Soit U un ouvert d'un e.v.n. E ; d'après 9.3.3, on doit prouver que, si U est connexe, alors il est connexe par arcs (c'est trivial si U est vide). On suppose donc que U est un connexe non vide. Soit $a \in U$ et $C = \{x \in U \mid$ il existe un connexe par arcs $C_a(x)$ vérifiant $a, x \in C_a(x)$ et $C_a(x) \subset U\}$. Par définition, C est une partie de U qui est connexe par arcs (si $x, y \in A$, on a $x, y \in C_a(x) \cup C_a(y)$, qui est connexe par arcs puisque $C_a(x)$ et $C_a(y)$ le sont et $a \in C_a(x) \cap C_a(y)$) ; montrons alors que $U = C$ (ce qui prouvera que U est bien connexe par arcs). Comme U est connexe et C est une partie non vide de U (car $a \in U$; on peut prendre $C_a(a) = \{a\}$), il suffit de prouver que C est un ouvert fermé de U :

- C est un ouvert de U : soit $x \in C$ et $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$ (une telle boule ouverte existe puisque U est un ouvert de E) ; prouvons, qu'en fait, $B(x,r) \subset A$. Soit donc $y \in B(x,r)$; on dispose alors d'un connexe par arcs $C_a(x) \cup B(x,r)$ (réunion de deux connexes par arcs ayant au moins un point commun : x ; c'est ici que l'on utilise que E est un e.v.n. : alors $B(x,r)$ est même convexe, d'après 9.1.3) qui est inclus dans U et qui contient a et y ; par suite, $y \in C$. Ainsi $B(x,r) \subset C$; ceci étant vrai pour tout x de C, C est voisinage de chacun de ses points, donc un ouvert de E ; comme il est inclus dans U, c'est donc aussi un ouvert de U.

- C est un fermé de U : soit $x \in C' = U \cap \overline{C}$, l'adhérence de C dans U (voir 4.3.11), et $B(x,r) \subset U$ comme ci-dessus. Le point x étant adhérent à C (dans U), on a $C \cap B(x,r) \neq \emptyset$; soit donc $y \in C \cap B(x,r)$. On dispose donc d'un connexe par arcs $C_a(y) \cup B(x,r)$ (réunion de deux connexes par arcs qui ont au moins un point commun : y) qui est inclus dans U et qui contient a et x, ce qui prouve que $x \in C$; ceci étant vrai pour tout x de C', on a $C' = C$, de sorte que C est un fermé de U. □

9.3.6 Proposition : Soit A une partie de $\mathbb{R}$ (muni de sa distance usuelle). On a les équivalences : A est connexe $\Longleftrightarrow$ A est connexe par arcs $\Longleftrightarrow$ A est convexe $\Longleftrightarrow$ A est un intervalle.

Preuve : D'après 9.2.3 et 9.3.3, il suffit de prouver que tout connexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle. Soit donc A une partie connexe de $\mathbb{R}$, a et b deux points de A, et $c \in \mathbb{R}$ vérifiant $a \leq c \leq b$; on doit prouver que $c \in A$. Considérons les parties suivantes : $F = A \cap]-\infty, c]$ et $G = A \cap [c, +\infty[$; ce sont deux fermés de A qui sont non vides (car $a \in F$ et $b \in G$) et qui vérifient $F \cup G = A$. Comme A est connexe, on a forcément $F \cap G \neq \emptyset$, *i.e.* $c \in A$, puisque $F \cap G = A \cap \{c\}$. □

9.3.7 Exemples (*en exercices*) : Pour la distance usuelle, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas connexes (ce ne sont pas des intervalles). Un espace métrique discret est connexe ssi il possède au plus un point (il est donc facile de trouver un espace métrique qui possède une boule non connexe) ; par suite, $(\mathbb{R}, d_0)$ n'est pas connexe ... est-ce en contradiction avec le fait que $\mathbb{R}$ est convexe ?

On peut utiliser 4.2.6 pour voir qu'un espace métrique E est connexe ssi toute fonction continue $f : E \longrightarrow \mathbf{2}$ est constante (où $\mathbf{2}$ est discret).

Toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, ouverte et fermée est un homéomorphisme.

9.3.8 Remarques : Les résultats de 9.2.5 9.2.6, 9.2.7 et 9.2.8 sont encore vrais si l'on remplace partout “connexe par arcs” par “connexe” ; on ne donne pas ici leur preuve “connexe” (voir [2] et [3]). Le résultat de 9.2.11 est aussi vrai pour les connexes, nous en donnerons dans 9.3.20 une preuve spécifique au cas connexe.

Cependant, les résultats qui suivent (de 9.3.9 à 9.3.12) sont vrais pour les connexes, mais pas pour les connexes par arcs (voir par exemple le graphe Σ de 9.2.12 et 9.3.4 qui est connexe par arcs mais dont la fermeture ne l'est pas ; cette fermeture est cependant connexe, d'après 9.3.9).

9.3.9 Proposition : Dans un espace métrique, l'adhérence d'une partie connexe est connexe.

Preuve : Soit A une partie connexe d'un espace métrique E. Supposons que $\overline{A} = B \cup C$, où B et C sont deux fermés disjoints de $\overline{A}$. On a donc $A \cap B = A$ ou $A \cap C = A$ (puisque $A \cap B$ et $A \cap C$ sont deux fermés disjoints de A (supposé connexe) qui vérifient $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A$), *i.e.* $A \subset B$ ou $A \subset C$. Comme B et C sont des fermés de E (puisqu'ils sont fermés dans le fermé $\overline{A}$), on obtient $\overline{A} \subset B$ ou $\overline{A} \subset C$, et donc finalement $\overline{A} = B$ ou $\overline{A} = C$. □

9.3.10 Proposition : Soit A et B deux parties d'un espace métrique telles que l'on ait les inclusions $B \subset A \subset \overline{B}$; si B est connexe, alors A est aussi connexe.

Preuve : Désignons par B' l'adhérence de B dans A ; utilisant 4.3.11, on obtient $B' = A \cap \overline{B} = A$. La connexité de A résulte donc de celle de B'. □

9.3.11 Proposition : Soit A et B deux parties connexes d'un espace métrique vérifiant $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$; alors $A \cup B$ est connexe.

Preuve : Posons $C = A \cup B$; on doit prouver que C est connexe. Comme $B \subset C \cap \overline{B} \subset \overline{B}$, avec B connexe, on sait que $C \cap \overline{B}$ est connexe (voir 9.3.10). D'autre part, comme A est connexe et comme $A \cap (C \cap \overline{B}) = (A \cap C) \cap \overline{B} = A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ par hypothèse, on en déduit que $A \cup (C \cap \overline{B}) = C \cap (A \cup \overline{B}) = C$ est connexe. □

9.3.12 Remarque (*en exercice*) : Le résultat de 9.3.11 est plus fort que celui (voir 9.2.7 et 9.3.8) qui affirme que, si deux connexes sont d'intersection non vide, alors leur réunion est connexe. D'ailleurs, pour l'exemple qui suit, on a vraiment besoin de 9.3.11. Par contre, on peut avoir A et B connexes vérifiant $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ sans que $A \cup B$ soit connexe !

9.3.13 Exemple (*en exercice*) : Le graphe Σ_0 de la fonction $\sigma_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $\sigma_0(x) = 0$ ou $\sin 1/x$ selon que $x \leq 0$ ou non, est connexe. Par contre, on a vu dans 9.2.12 qu'il n'est pas connexe par arcs.

9.3.14 Définitions : Pour chaque point x d'un espace métrique E, on définit $C_x = \bigcup_{C \in \mathcal{C}(x)} C$, où $\mathcal{C}(x) = \{C \subset E \mid C \text{ est connexe et } x \in C\}$. Alors C_x est un connexe de E qui contient x, d'après la version connexe de 9.2.7 (voir 9.3.8) ; c'est même le plus grand connexe de E qui contient x, on l'appelle la *composante connexe de* x. Une telle composante connexe est fermée, d'après 9.3.9.

Une partie C de E s'appelle une *composante connexe de* E si c'est la composante connexe d'un point de E. Donc, C est une composante connexe de E ssi C est un connexe maximal de E, c'est-à-dire ssi C est un connexe de E qui vérifie la propriété de maximalité suivante : si C' est un autre connexe de E tel que $C \subset C'$, alors $C = C'$ (voir 0.2.3).

Bien sûr, E est connexe ssi E possède au plus une composante connexe.

9.3.15 Proposition : Soit x et y deux points d'un espace métrique E. Alors $C_x = C_y$ ssi x et y sont contenus dans une même partie connexe de E.

<u>Preuve</u> : Si $C_x = C_y$, alors x et y sont dans le connexe C_x. Inversement, s'il existe un connexe C qui contient x et y, alors $C \subset C_x$ et $C \subset C_y$ (car C_x et C_y sont des connexes maximaux qui contiennent respectivement x et y), de sorte que $C_x \cup C_y$ est un connexe (voir 9.2.7 et 9.3.8) qui contient x et y. Toujours pour des questions de maximalité, on en déduit que $C_x = C_x \cup C_y = C_y$. □

9.3.16 Proposition : Soit E un espace métrique et $\mathcal{R}$ la relation sur E définie par $x \sim y \ mod(\mathcal{R}) \iff C_x = C_y$; alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E dont les classes d'équivalence sont les composantes connexes de E (les composantes connexes de E forment donc une partition de E).

<u>Preuve</u> : Utilisons 9.3.15. La relation $\mathcal{R}$ est réflexive : pour tout $x \in E$, on dispose d'un connexe contenant x : $\{x\}$. La relation $\mathcal{R}$ est symétrique : tout connexe contenant x et y contient y et x ! La relation $\mathcal{R}$ est transitive : si C et C' sont deux connexes contenant respectivement x et y, et y et z, alors $C \cup C'$ est un connexe (puisque $y \in C \cap C'$) qui contient x et z.

Remarquant que l'on peut écrire $y \sim x \ mod(\mathcal{R})$ ssi $y \in C_x$ (car $y \in C_y = C_x$), la classe d'équivalence de x, $mod(\mathcal{R})$, s'écrit $\tilde{x} = \{y \in E \mid y \in C_x\} = C_x$. □

9.3.17 Proposition Toute partie non vide, connexe, ouverte et fermée d'un espace métrique est une composante connexe de cet espace.

<u>Preuve</u> : Soit C une partie non vide, connexe, ouverte et fermée d'un espace métrique E ; montrons que c'est un connexe maximal. Soit donc C' une autre partie connexe de E vérifiant $C \subset C'$. La partie C étant à la fois ouverte et fermée dans le connexe C' (voir 4.3.9 et 4.3.10), on en déduit que $C = C'$ (car C est non vide). □

9.3.18 Corollaire : Soit $(C_i)_{i \in I}$ une partition de E (les C_i sont donc tous non vides), où les C_i sont tous connexes. Si les C_i sont tous ouverts, ou bien si les C_i sont tous fermés et I fini, alors les C_i sont les composantes connexes de E.

<u>Preuve</u> : Dans les deux conditions proposées les éléments de la partition donnée est formée de connexes non vides qui sont à la fois ouverts et fermés ; ce sont donc tous des composantes connexes de E d'après 9.3.17, et il n'y en pas d'autre puisqu'ils forment une partition de E. □

9.3.19 Proposition : Soit E et F deux espaces métriques homéomorphes, alors E et F ont le même nombre de composantes connexes (en d'autres termes, le nombre de composantes connexes est un *invariant topologique*). En particulier, on retrouve le fait que E est connexe ssi F l'est.

Preuve : Soit $f : E \longrightarrow F$ un homéomorphisme, C une composante connexe de E. Alors, $f(C)$ est un connexe de F (voir 9.2.5 et 9.3.8) qui est maximal : en effet, si C' est un connexe de F vérifiant $f(C) \subset C'$, on a $C = f^{-1}(C')$, puisque C est un connexe maximal contenu dans $f^{-1}(C')$ qui est lui-même connexe (car f^{-1} est continue) ; par suite $f(C) = C'$, et donc $f(C)$ est une composante connexe de F. En remplaçant f par f^{-1}, on montre que, si D est une composante connexe de F, alors $f^{-1}(D)$ est une composante connexe de E. Ceci montre qu'il y a une correspondance biunivoque entre les composantes connexes de E et celles de F. □

9.3.20 Proposition : Un produit fini d'espaces métriques non vides est connexe ssi chacun de ses facteurs l'est.

Preuve : $\Longleftarrow$: Soit E et F deux espaces métriques non vides et connexes ; soit aussi (x, y) et (x', y') deux points de $E \times F$. On considère les sous-espaces $E \times \{y\}$ et $\{x'\} \times F$; ce sont des connexes (le premier est homéomorphe à E et le second à F ...voir 4.4.5 et 9.3.19) qui sont d'intersection non vide (car $(x', y) \in (E \times \{y\}) \cap (\{x'\} \times F)$), il en résulte que leur réunion C est aussi connexe. Comme $(x, y) \in C$ et $(x', y') \in C$, on en déduit que (x, y) et (x', y') ont la même composante connexe. Les deux points en question étant quelconque, on en déduit que $E \times F$ ne possède qu'une seule composante connexe ; par suite $E \times F$ est connexe.

$\Longrightarrow$: Si E et F sont des espaces métriques non vides tels que $E \times F$ soit connexe. Le fait que E et F sont connexes résulte de la continuité des projections et du fait que, puisque E et F sont non vides, on a $E = \pi_1(E \times F)$ et $F = \pi_2(E \times F)$.

La topologie produit étant associative à homéomorphisme près (voir 4.4.13), on en déduit que le résultat est encore vrai pour un nombre fini d'espaces métriques connexes. □

9.3.21 Proposition : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ ne sont pas homéomorphes, pour tout entier $n \geq 2$.

Preuve : D'abord, tous les $\mathbb{R}^n$ sont connexes par arcs (avec $n \geq 1$), d'après 9.2.11, puisque $\mathbb{R}$ l'est ; on ne peut donc en rester là pour conclure. S'il existait un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, alors sa restriction $f : \mathbb{R}^n - \{X\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{f(X)\}$ serait encore un homéomorphisme pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. Mais, d'après 9.3.19, ce n'est pas possible puisque $\mathbb{R}^n - \{X\}$ est connexe par arcs pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ (voir 9.2.9) et $\mathbb{R} - \{x\}$ possède deux composantes connexes pour tout $x \in \mathbb{R}$, *i.e.* les ouverts (de $\mathbb{R} - \{x\}$) : $]-\infty, x[$ et $]x, +\infty[$. Un tel f n'existe donc pas. □

9.3.22 Proposition : Il n'existe pas d'injection continue $\mathbb{S}^1_2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Preuve : Si l'on disposait d'une injection continue $f : \mathbb{S}^1_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, sa restriction $\mathbb{S}^1_2 \longrightarrow f(\mathbb{S}^1_2)$ serait une bijection continue et donc un homéomorphisme (puisque $\mathbb{S}^1_2$ est compact ; voir 5.1.13). D'après 5.1.7, 5.1.11 et 9.2.6, on sait que $f(\mathbb{S}^1_2)$ est un intervalle fermé borné. Il s'agit donc de prouver que $\mathbb{S}^1_2$ n'est homéomorphe à aucun intervalle fermé et borné. S'il existait un homéomorphisme $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{S}^1_2$, sa restriction $[a, b] - \{x\} \longrightarrow \mathbb{S}^1_2 - \{h(x)\}$ serait encore un homéomorphisme pour

L'espace $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ et } z^2 - y^2 = 1\}$, intersection d'une sphère et d'un cylindre hyperbolique (figure 18), est-il compact ? est-il connexe ? Considérer l'espace $\Gamma_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2+y^2 = r^2 \text{ et } x^2+y^2 = z^2\}$, intersection d'un cylindre et d'un cône (figure 19) ; donner ses composantes connexes selon les valeurs du réel $r > 0$.

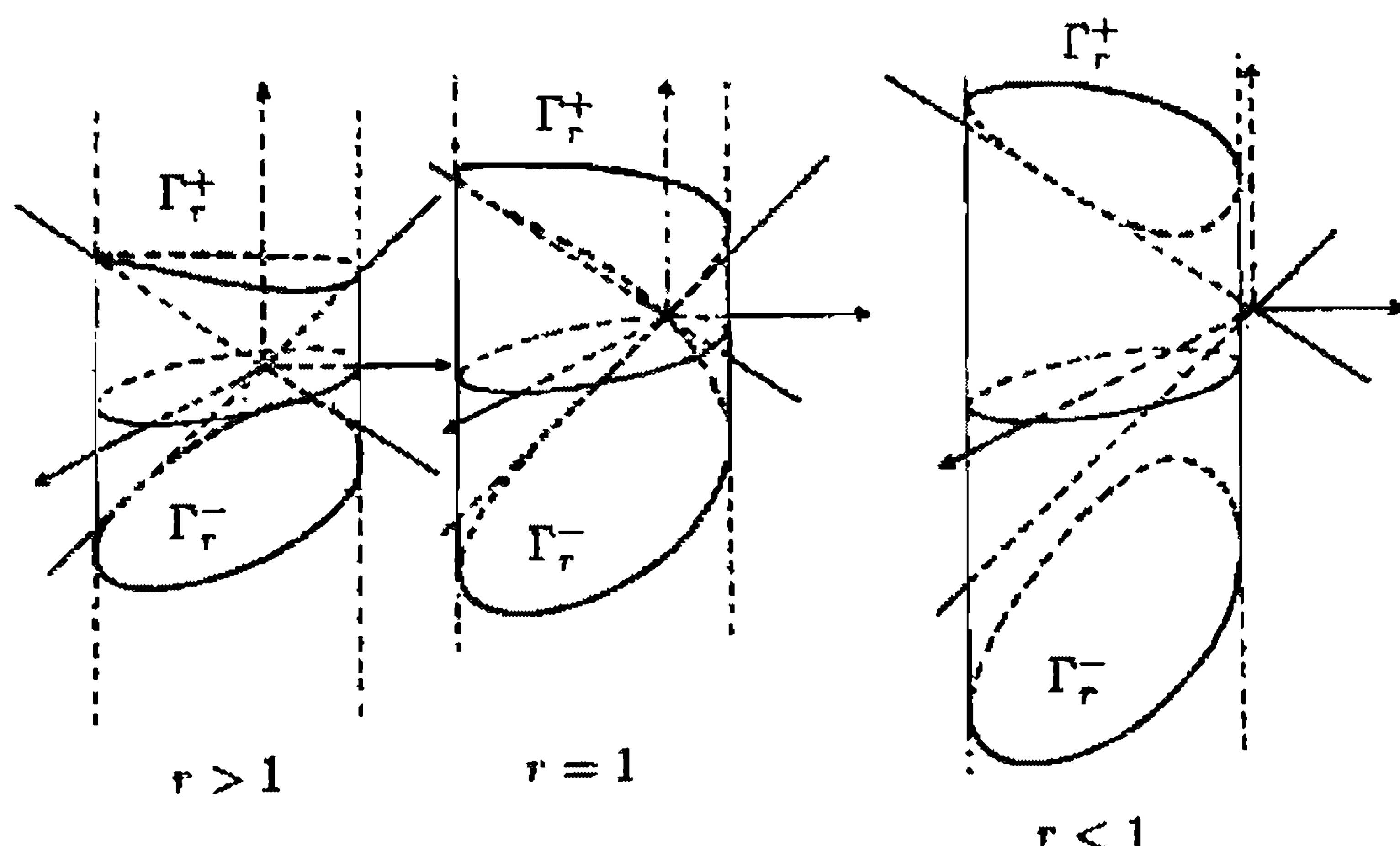


Figure 19 (9.3.23)

$\mathbb{R}$ n'est homéomorphe à aucun intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$, borné ou non (on savait déjà, par un argument de compacité, que $\mathbb{R}$ n'est homéomorphe à aucun intervalle de la forme $[a, b]$: voir 5.1.15 ; par contre, on a vu dans 4.3.3 que tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes à $\mathbb{R}$).

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$ et $[0, 1]$ ne sont pas homéomorphes deux-à-deux.

$S^1_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2-1)(x^2+y^2) = 0\}$ et $H' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\}$ ne sont pas homéomorphes deux-à-deux.

9.3.24 Remarque finale : Une question topologique fondamentale (que l'on s'est souvent posée dans cet ouvrage et que l'on désignera sous le nom de problème de l'homéomorphie) est la suivante : étant donnés deux espaces métriques (c'est le cadre de ce livre), sont-ils homéomorphes ? C'est en effet une question essentielle dans la mesure où, du point de vue topologique, deux espaces métriques homéomorphes sont indistinguables, au sens où l'on peut passer de l'un à l'autre par une déformation élastique, sans déchirure (on a donc affaire à une sorte de "géométrie élastique" : voir 4.3.4) ; on a donné, dans 4.3.3 et 4.4.6, de multiples exemples d'espaces homéomorphes en exhibant des homéomorphismes entre ces espaces. Prouver que deux espaces métriques ne sont pas homéomorphes n'est pas toujours simple ; dans les meilleurs des cas, on utilise les propriétés topologiques (*i.e.* celles qui sont préservées par homéomorphismes), telles que la compacité ou la connexité (voir 5.1.11, 9.2.5 et 9.3.19).

On remarque, par contre, que le fait d'être complet n'est pas une propriété topologique : en effet, $\mathbb{R}$ et $]0, 1[$ sont homéomorphes, et pourtant $\mathbb{R}$ est complet alors que $]0, 1[$ ne l'est pas ; en fait, on a vu dans le chapitre VI que la propriété d'être complet est conservée par les homéomorphismes uniformes (voir 6.4.7 et 6.4.9). L'exemple précédent montre aussi en passant que le fait d'être borné n'est pas non plus une propriété topologique.

Ainsi, pour que deux espaces métriques ne soient pas homéomorphes, il suffit, par exemple, que l'un d'eux soit compact et que l'autre ne le soit pas (c'est le cas de $\mathbf{S}_2^1$ et $\mathbb{R}$, ou de $[a,b]$ et $\mathbb{R}$). Mais un tel argument est inefficace pour distinguer (topologiquement parlant) les intervalles $[a,b[$ et $]a,b[$, ou bien les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ (où n est un entier ≥ 2), aucun de ces espaces n'étant compact ; ou bien encore, $\mathbf{S}_2^1$ et $[a,b]$ qui sont tous les deux compacts ! On utilise alors, pour ces exemples, le fait que, pour que deux espaces métriques ne soient pas homéomorphes, il suffit aussi qu'eux-mêmes ou certains de leurs sous-espaces ne possèdent pas le même nombre de composantes connexes (voir 9.3.19, 9.3.21, 9.3.22 et 9.3.23).

Cependant, ces arguments ne sont pas la panacée universelle pour résoudre le problème de l'homéomorphie. D'autres outils (tels que l'**homotopie**) sont efficaces. Une discipline se charge tout spécialement de ce problème de l'homéomorphie : la **topologie algébrique** ; elle répond à ce problème dans de nombreux cas ... Et pourtant, même à ce jour, beaucoup de problèmes de ce type restent ouverts.

EPILOGUE

Un lecteur attentif aura certainement remarqué que la donnée de la distance n'intervient en aucune manière dans le chapitre IX ; dans ce chapitre, seule compte la topologie associée à cette distance : on n'y utilise que des ouverts, des fermés, des adhérences, des applications continues, toutes choses que l'on peut définir, sans l'aide d'une distance, dans des espaces plus généraux appelés espaces topologiques (voir 1 ci-dessous). Si quasiment tous les résultats établis dans ce livre sont vrais dans les espaces topologiques, certains sont spécifiques aux espaces topologiques particuliers que sont les espaces topologiques métrisables (voir 3 ci-dessous). Disons rapidement que, si dans les espaces métriques tout peut s'exprimer à l'aide des suites, ça n'est pas le cas dans les espaces topologiques non métrisables.

Ce qui suit n'est plus un cours à proprement parler ; nous ne donnerons quasiment pas de démonstrations. C'est juste un guide pour faire la part des choses entre les espaces métriques et les espaces topologiques non métrisables.

On donne d'abord une liste de définitions et de propriétés spécifiques aux espaces topologiques généraux, définitions dans lesquelles n'interviennent pas de distances (et donc pas de boules ; la notion de partie bornée n'existe pas non plus), mais que l'on a déjà rencontrées dans le cas des espaces métriques. Bien sûr, tout ce qui a été défini et démontré dans le chapitre IX peut être repris tel quel ici.

1 Définitions : Un *espace topologique* est la donnée d'un ensemble E et d'un ensemble $\mathcal{T}$ (appelée *topologie sur* E) de parties de E vérifiant les axiomes suivants : $\emptyset, E \in \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ est stable par réunions quelconques et par intersections finies. L'espace topologique est noté $(E, \mathcal{T})$ (ou seulement E s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la topologie). Les éléments de $\mathcal{T}$ s'appellent des *ouverts* de l'espace topologique $(E, \mathcal{T})$ (ou de $\mathcal{T}$, ou de E s'il n'y a pas d'ambiguïté) ; les complémentaires des ouverts s'appellent des *fermés*.

2 Exemple : Tout espace métrique est un espace topologique (plus précisément, on peut associer un espace topologique $(E, \mathcal{T}_d)$ à tout espace métrique (E, d) : voir 3.2.12 et 3.2.16) ; ses ouverts étant les réunions de boules ouvertes (ces dernières formant une base de topologie de $\mathcal{T}_d$: voir 3.2.16).

3 Définition : Un espace toplogique $(E, \mathcal{T})$ est dit *métrisable* s'il existe une distance d sur E dont la topologie $\mathcal{T}_d$ associée est égale à la topologie $\mathcal{T}$.

4 Définition : Soit x un point d'un espace topologique E. On appelle *voisinage* de x une partie V de E pour laquelle il existe un ouvert U de E vérifiant $x \in U$ et $U \subset V$.

5 Propriété : Par définition, tout ouvert d'un espace topologique est voisinage de chacun de ses points (on peut prendre $V = U$ pour tout point d'un ouvert U).

6 Propriété : Les voisinages ouverts d'un point forment une base de voisinages de ce point ; on peut donc se limiter à ces voisinages ouverts pour exprimer les propriétés topologiques en ce point (voir la section III.3).

7 Définition : Un espace topologique E est dit *séparé* si, pour tout $x, y \in E$ vérifiant $x \neq y$, il existe deux voisinages disjoints de x et y respectivement.

8 Propriétés : Un espace topologique dans lequel il existe un point qui ne possède pas de base dénombrable de voisinages n'est pas métrisable (voir 3.3.3) ; un espace topologique non séparé n'est pas métrisable (voir 3.2.11).

9 Exemples : Soit E un ensemble ; la topologie *grossière* sur E est celle dont les seuls ouverts sont $\emptyset$ et E ; si E est muni de la topologie grossière, on dit que E est un *espace grossier*. Si E a au moins deux points distincts, cette topologie n'est pas séparée (le seul ouvert non vide contient tous les points de E), elle n'est donc pas métrisable dans ce cas.

Sur l'ensemble $\mathbf{2} = \{0, 1\}$, mise à part la topologie discrète (dont les ouverts sont $\emptyset$, $\{0\}$ $\{1\}$ et $\mathbf{2}$) qui est la seule métrisable (par la distance discrète d_0), il y a exactement trois topologies non métrisables : la grossière (dont les ouverts sont $\emptyset$ et $\mathbf{2}$) et deux autres topologies, appelées *topologies de Sierpinski* (voir [1] 1.5.2), pour lesquelles on rajoute un seul singleton ($\{0\}$ ou $\{1\}$) comme ouvert (si $\{1\}$ est le singleton ouvert, $\mathbf{2}$ est le seul voisinage de 0 ; cette topologie est donc non séparée). On appelle *espace de Sierpinski* tout espace topologique ayant exactement deux éléments (*i.e.* du type $S = \{a, b\}$) qui, hormis les ouverts $\emptyset$ et S, admet un seul singleton ouvert (disons $\{b\}$) ; un tel espace est non métrisable puisqu'il est homéomorphe à $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ muni de sa topologie de Sierpinski qui admet, par exemple, $\{1\}$ pour ouvert (par $\varphi : S \longrightarrow \mathbf{2}$ défini par $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(b) = 1$).

On définit une topologie importante sur un ensemble E en prenant pour fermés, E lui-même et toutes ses parties dénombrables (dénombrable signifiant fini ou infini dénombrable : voir 0.1.6) ; on l'appelle la *topologie des codénombrables*. On voit facilement qu'elle vérifie les axiomes des fermés donnés dans 3.1.14. Si E est dénombrable, cette topologie est métrisable (il s'agit alors de la topologie discrète puisque toutes ses parties sont fermées) ; sinon, cette topologie n'est pas séparée (car deux ouverts non vides ne sont jamais disjoints), elle ne peut donc pas être métrisable dans ce cas (voir [1] 1.5.4).

On termine en citant un exemple d'espace topologique séparé, dont tous les points possèdent une base dénombrable de voisinages et qui, pourtant, n'est pas métrisable : on considère $\mathbb{R}$ muni de la topologie engendrée par les intervalles de la forme $]a, b]$ où a, b sont des réels vérifiant $a < b$ (voir [1] 1.5.6 et [1] 2.2.19).

10 Remarque : Bien des définitions données dans les espaces métriques sont encore valables pour un espace topologique, les voisinages des espaces topologiques jouant le rôle des boules des espaces métriques (bien sûr, quand l'espace topologique est métrisable, ces notions coïncident avec leurs homologues données dans les espaces métriques) ; par exemple :

11 Définitions : Soit A une partie d'un espace topologique E. Un point x est dit *intérieur* à A si A est un voisinage de x. L'ensemble des points intérieurs à A, s'appelle l'*intérieur de* A et se note $\overset{\circ}{A}$; c'est le plus grand ouvert inclus dans A. Bien sûr, A est ouvert ssi $\overset{\circ}{A} = A$, et V est un voisinage de x ssi $x \in \overset{\circ}{V}$.

Un point x de E est dit *adhérent à* A si, pour tout voisinage V de x, on a $A \cap V \neq \emptyset$. L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'*adhérence* de A et se note $\overline{A}$; c'est le plus petit fermé contenant A (c'est pourquoi on l'appelle aussi la

fermeture de A). Bien sûr, A est fermé ssi $\overline{A} = A$.

Les relations de 3.2.2 : $(\overset{\circ}{A})^c = \overline{A^c}$ et $(\overset{\circ}{A^c}) = (\overline{A})^c$ sont encore vraies dans un espace topologique quelconque.

12 Définition : Soit E et E' deux espaces topologiques, x un point de E et $f : E \longrightarrow E'$ une application. On dit que f est *continue* au point x si, pour tout voisinage V' de $f(x)$ dans E', il existe un voisinage V de x dans E vérifiant $f(V) \subset V'$. Cette définition étant le pendant topologique de 4.2.2, tous les résultats et définitions de la section IV.2 sont encore vrais pour une application entre espaces topologiques.

13 Définitions : On peut encore parler de *topologie induite* sur une partie A d'un espace topologique E (appelé *sous-espace topologique de E* quand il est muni de cette topologie induite), ou de *topologie produit* sur un produit $\Pi_i E_i$ d'espaces topologiques E_i (appelé *espace topologique produit* quand il est muni de cette topologie produit) : ce sont les *topologies les moins fines* (*i.e.* possédant le moins d'ouverts possible), sur A et $\Pi_i E_i$ respectivement, qui rendent continues, d'une part l'injection canonique $j_A : A \longrightarrow E$, d'autre part les projections canoniques $\pi_i : \Pi_i E_i \longrightarrow E_i$. Comme dans le cas métrisable, la première a pour ouverts les traces sur A des ouverts de E, et la seconde est engendrée par les pavés ouverts ; tout ce qui a été dit pour les espaces métriques dans les sections IV.3 et IV.4 est donc encore valable pour les espaces topologiques.

14 Définition : Soit E un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E ; on peut alors définir une topologie sur l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ (voir 0.1.4), appelée la *topologie quotient* : c'est la *topologie la plus fine* (*i.e.* possédant le plus d'ouverts possible) sur $E/\mathcal{R}$ rendant continue la surjection canonique $q : E \longrightarrow E/\mathcal{R}$ (voir 0.1.5) ; ses ouverts sont les parties U de $E/\mathcal{R}$ telles dont l'image réciproque $\overset{-1}{q}(U)$ est un ouvert de E (voir 0.1.7). On dit que $E/\mathcal{R}$ est un *espace topologique quotient* s'il est muni de la topologie quotient.

Même si E est un espace métrique, l'espace topologique quotient $E/\mathcal{R}$ n'est pas toujours métrisable (c'est pourquoi, on n'a pas parlé de quotient dans cet ouvrage) : par exemple, si $\mathcal{R}_2$ est la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ (muni de sa distance usuelle d_u) définie par $x \sim y \quad mod(\mathcal{R}_2) \iff \exists\lambda \neq 0 \quad y = \lambda x$, alors les ouverts de la topologie quotient sur l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathcal{R}_2 = \{\{0\}, \mathbb{R}^*\}$ (voir 0.1.4) sont $\emptyset$, $\{\mathbb{R}^*\}$ et $\mathbb{R}/\mathcal{R}_2$ (puisque $\overset{-1}{q}(\emptyset) = \emptyset$, $\overset{-1}{q}(\{\mathbb{R}^*\}) = \mathbb{R}^*$ et $\overset{-1}{q}(\mathbb{R}/\mathcal{R}_2) = \mathbb{R}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$, contrairement à $\overset{-1}{q}(\{\{0\}\}) = \{0\}$; voir [1] 2.3.1). Cet espace topologique quotient $\mathbb{R}/\mathcal{R}_2$ n'est pas métrisable puisque c'est un espace de Sierpinski (voir 9 ci-dessus ; on a signalé dans 0.1.5 une bijection $\varphi : \mathbb{R}/\mathcal{R}_2 \longrightarrow \mathbf{2}$).

On renvoie à l'ouvrage [1] dans lequel on a présenté et étudié en détail un grand nombre d'espaces topologiques quotients métrisables : par exemple le cône (comme quotient, *i.e.* recollement, de deux plans parallèles en un point), la *bande de Moebius* (comme recollement d'une bande "retournée"), le tore (comme recollement d'un cylindre), la *bouteille de Klein* (comme recollement "pénétrant" d'un cylindre (figure 20), ..., les *espaces projectifs* ...etc, qui sont des classiques en topologie.

15 Définition : On dit qu'un espace topologique est *compact* s'il est séparé et si, de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous recouvrement fini (voir

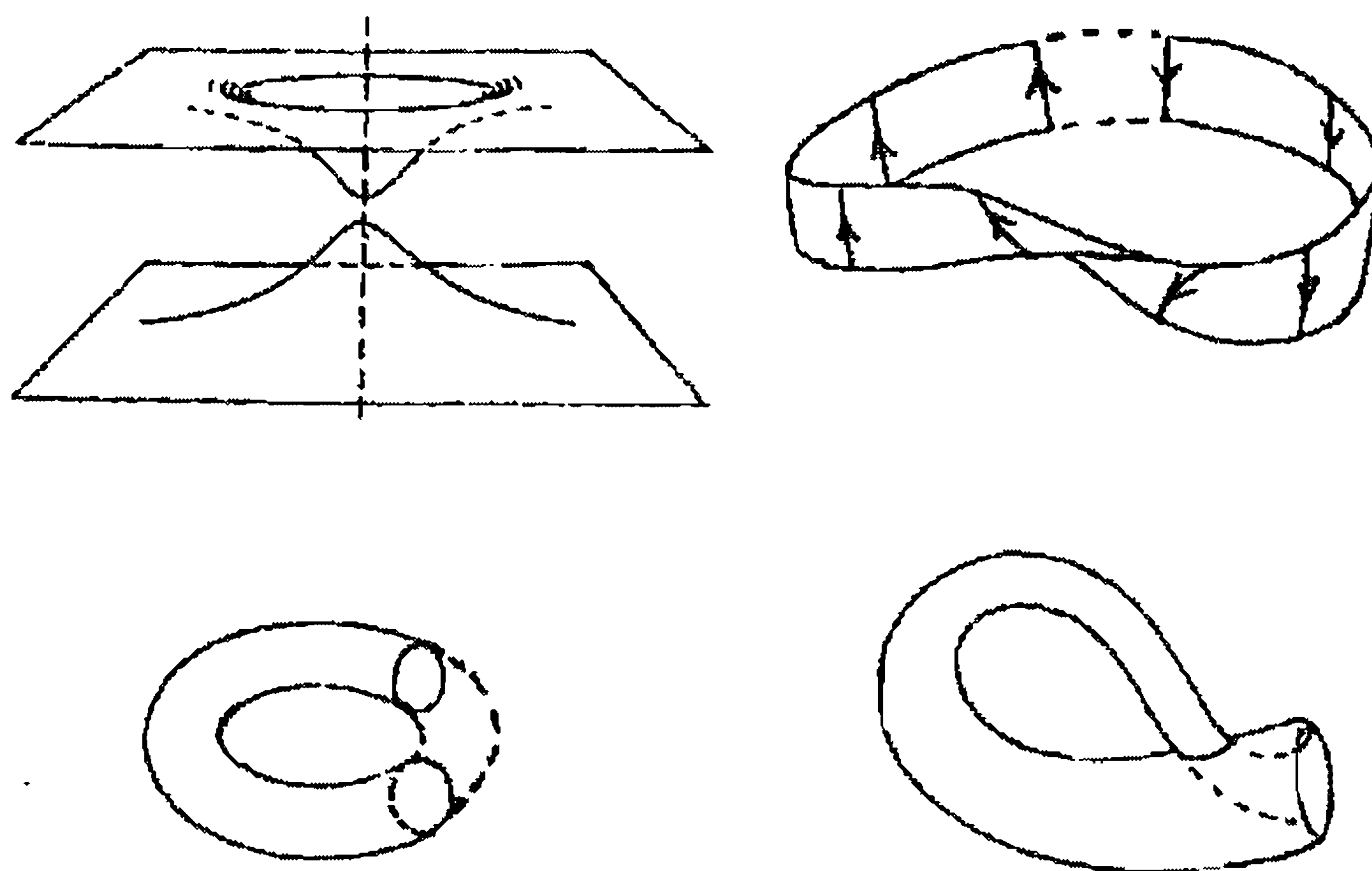


Figure 20 (Epilogue)

5.2.21) ; les résultats de 5.2.22, 5.2.24 et 5.2.26 sont donc toujours vrais dans les espaces topologiques compacts.

16 Remarque : Si E est un espace topologique compact, alors toute suite de E possède une sous-suite convergente. La réciproque est fausse (voir Bourbaki, topologie générale, chap 9, paragraphe 2, exercice 15, p.50, 51) ; elle est cependant vraie dans le cas où l'espace topologique E est métrisable (voir 5.2.21).

17 Remarque : Une partie compacte d'un espace topologique n'est pas toujours fermée (elle l'est si l'espace topologique est séparé, donc, en particulier, si l'espace est métrisable, comme on l'a vu dans 5.1.6).

18 Théorème (de la projection fermée "topologique") : Soit E et K deux espaces topologiques, le second étant compact ; alors la projection canonique $\pi : E \times K \longrightarrow E$ est fermée, si l'on munit l'ensemble $E \times K$ de sa topologie produit (voir [1] 3.6.8) ; l'hypothèse que K est compact est essentielle : voir 5.2.15. On a établi un théorème de la projection fermée "métrique" dans 5.2.17.

19 Définition : On dit qu'un espace topologique est *localement compact* s'il est séparé et si chacun de ses points possède un voisinage compact (les résultats de 5.3.2 à 5.3.8 sont toujours vrais pour les espaces topologiques localement compacts).

20 Théorème d'Alexandroff : Tout espace topologique localement compact possède un *compactifié d'Alexandroff* (*i.e.* est homéomorphe à un espace topologique compact privé d'un point) ; un tel compactifié d'Alexandroff est unique à homéomorphisme près (il est obtenu par adjonction d'un point à l'infini).

21 Remarque : En particulier, tout espace métrique localement compact possède un compactifié d'Alexandroff (qui n'est pas forcément métrisable : en voir un exemple dans [1] 3.6.13). On a donné de nombreux exemples de compactifiés d'Alexandroff métriques dans 5.3.13.

22 Remarque : Se reportant à 3.1.1 et 2.3.1, on voit que, dans les espaces métriques, les notions de point adhérent, de fermé et d'application continue se définissent à l'aide des suites convergentes. On ne peut pas en faire autant dans les espaces topologiques non métrisables, bien que la notion de suite convergente se définisse sans difficulté dans un espace topologique quelconque :

23 Définition : Une suite (x_n) d'un espace topologique E est dite *convergente* vers un point x de E si, pour tout voisinage V de x, il existe un entier N tel que l'on ait $x_n \in V$ pour tout $n \geq N$ (formulation donnée pour les espaces métriques dans 3.3.4). Contrairement à ce qui se passe dans les espaces métriques, il n'y a pas forcément unicité de la limite pour une suite convergente dans un espace topologique non séparé :

24 Exemples : Dans un espace grossier (voir 9 ci-dessus), toute suite converge vers tous les points de l'espace (évidemment puisque E est le seul voisinage possible pour chaque point). Par contre, pour la topologie des codénombrables sur un ensemble E (dénombrable ou non, voir 9 ci-dessus), les suites convergentes sont les suites stationnaires (voir [1] 1.5.4) ; il y a donc unicité de la limite ...et pourtant, dans le cas non dénombrable, l'espace n'est pas séparé (voir 9 ci-dessus).

25 Remarque : l'équivalence $\mathcal{T} = \mathcal{T}' \Longleftrightarrow \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ ont les mêmes suites convergentes, vraie dans les espaces métriques, ne l'est plus dans les espaces topologiques non métrisables : il suffit de considérer la topologie discrète et la topologie des codénombrables sur $\mathbb{R}$; elles ne sont pas égales puisque $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, et pourtant elles ont les mêmes suites convergentes !

26 Propriété : Soit A une partie d'un espace topologique E et x un point de E. Supposons qu'il existe une suite (x_n) de points de A qui converge vers x ; alors x est adhérent à A (tout voisinage de x contenant tous les x_n à partir d'un certain rang, rencontre obligatoirement A, puisque les x_n sont dans A). En particulier, si A est fermée, alors elle possède les limites de ses suites convergentes ; par contre la réciproque, vraie dans les espaces métriques, est fausse dans les espaces topologiques non métrisables :

27 Exemple : On munit $\mathbb{R}$ de la topologie des codénombrables donnée dans 9 ci-dessus (elle n'est pas métrisable puisque $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable) et l'on considère la partie $\mathbb{Q}^c$ qui n'est pas fermée, puisque non dénombrable. Elle possède pourtant les limites de ses suites convergentes, puisque ce sont les suites stationnaires (voir 24 ci-dessus).

28 Propriété : Soit E et E' deux espaces topologiques et $f : E \longrightarrow E'$ une application. Si f est continue, alors, pour toute suite (x_n) de points de E qui converge vers un point x dans E, la suite $(f(x_n))$ converge vers le point $f(x)$ dans E'. Par contre la réciproque, vraie dans les espaces métriques, est fausse dans les espaces topologiques non métrisables :

29 Exemple : On considère l'application $id : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$, où $\mathcal{T}_0$ est la topologie discrète et $\mathcal{T}$ la topologie des codénombrables sur $\mathbb{R}$. D'après 4.2.5 et 12 ci-dessus, cette application n'est pas continue puisque $\mathcal{T}_0 \not\subset \mathcal{T}$ ($\mathbb{Q} \in \mathcal{T}_0$ car $\mathcal{T}_0 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, bien que $\mathbb{Q} \notin \mathcal{T}$ car $\mathbb{Q}^c$ n'est pas dénombrable) ; cependant elle respecte les suites convergentes puisque $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_0$ ont les mêmes suites convergentes : les suites stationnaires.

30 Conclusion : On voit donc que, dans les espaces topologiques quelconques, on ne peut plus toujours "se fier" aux suites comme dans les espaces métriques. Ceci dit, pour l'essentiel, les résultats prouvés dans les espaces métriques sont encore vrais dans les espaces topologiques ; il faut juste trouver des preuves appropriées n'utilisant pas de distance, et pas systématiquement des suites (en fait, ce sont les *filtres* qui jouent, pour les espaces topologiques, le rôle des suites pour les espaces métriques ; voir [2] et [3]).

Nous allons nous en tenir là, conseillant aux étudiants qui veulent en savoir plus de poursuivre : les ouvrages sur la topologie générale ne manquent pas (voir, par exemple, les ouvrages [1], [2] et [3] cités dans la bibliographie).

SOLUTIONS

On propose ici des solutions (non systématiques) aux exemples proposés en exercices dans le cours ; ces solutions sont succintes lorsque c'est simple, assez détaillées lorsque cela se complique. Les numéros à trois chiffres cités ci-dessous renvoient précisément à ceux du cours correspondants et à d'autres solutions ci-dessous ; les numéros précédés du symbole [1], eux, renvoient à des exercices de l'ouvrage La géométrie du caoutchouc, Topologie, *cité dans la bibliographie, où l'on a développé (avec des solutions détaillées) certains de ces exemples.*

Chapitre premier

1.1.4 *Toute partie A de $\mathbb{R}$, d_u-bornée, est incluse dans l'intervalle borné* $[\inf A, \sup A]$ *(voir* 0.2.4 *et* 0.2.5*), dont le diamètre est* $\sup A - \inf A$. *Pour l'inégalité triangulaire* (D_3) $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$, *raisonner, dans le cas où $d=d_0$ ou δ_1, selon que $d(x,y)=1$ ou $d(y,z)=1$, ou non. Dans le cas où $d=\delta_2$, utiliser le fait que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \mapsto x/(1+x)$ est croissante. Ces trois dernières distances sont bornées par* 1 *(voir* [1] 1.4.1 *et* [1] 1.4.4*).*

$d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a) \leq d(x,a) \leq d(x,y)+d(y,a)$ *pour tout $a \in A$, donc* $d(x,A)-d(x,y) \leq d(y,a)$ *pour tout $a\in A$; utilisant* 0.2.4, *on obtient* $d(x,A)-d(x,y) \leq d(y,A)$ *(voir* [1] 1.4.7*). Bien sûr,* $d_u(a,[a,b[)=0$, *puisque $a\in[a,b[$; on a aussi* $d_u(b,[a,b[)=0$, *puisque* $d_u(b,[a,b[) \leq d_u(b,b-1/n)=1/n$ *à partir d'un certain n (rang à partir duquel $b-1/n \in [a,b[$). On a aussi* $d_u(x,\mathbb{Q})=0=d_u(x,\mathbb{Q}^c)$ *pour tout $x\in\mathbb{R}$, car il existe un rationnel a_n et un irrationnel b_n dans tout* $]x-1/n, x+1/n[$ *(voir* 0.2.5*), de sorte que* $d_u(x,\mathbb{Q}) \leq |x-a_n| \leq 1/n$ *et* $d_u(x,\mathbb{Q}^c) \leq |x-b_n| \leq 1/n$ *pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. La distance* $d_u(b,[a,b[)=0$ *ne peut être atteinte en un point de $[a,b[$, puisque, pour tout $x\in[a,b[$, on a* $d_u(b,x)=|b-x|>0$. *De même, si $y\in\mathbb{Q}$ et $z\in\mathbb{Q}^c$, les distances $d_u(z,\mathbb{Q})$ et $d_u(y,\mathbb{Q}^c)$ ne sont atteintes en aucun point de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^c$ respectivement. Par contre,* $d_u((a+b)/2,\{a,b\})=(b-a)/2$ *est atteinte en les deux points a et b de $\{a,b\}$.*

1.1.8 $d=d_f$, *où* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{Arctg}\, x$ *; cette distance est bornée puisque* $f(\mathbb{R}) =]-\pi/2, \pi/2[$ *est d_u-borné (voir* 1.1.4 *et* 1.1.5*).*

1.1.11 *Le fait que δ est bien définie résulte du fait que la série* $\sum_{n=0}^{\infty} 1/2^n$ *converge (on a* $\delta \leq 2\alpha$ *si* $d \leq \alpha$*) ; les axiomes des distances sont trivialement vérifiés par δ.*

1.2.3 *Bien sûr, les d_u-boules (ouvertes et fermées), de centre x et de rayon r, sont les intervalles bornés* $]x-r, x+r[$ *et* $[x-r, x+r]$ *; en fait, tous les intervalles bornés ouverts ou fermés, sont des d_u-boules :* $]a,b[= B_{d_u}((a+b)/2, (b-a)/2)$ *et* $[a,b] = B'_{d_u}((a+b)/2, (b-a)/2)$. *En désignant par $B_p(O,1)$ la d_p-boule unité ouverte de $\mathbb{R}^2$, centrée en l'origine, on voit immédiatement que $B_2(O,1)$ est un disque (ou boule euclidienne) ; de plus,* $(x,y) \in B_\infty(O,1)$ *ssi* $|x|<1$ *et* $|y|<1$, *de sorte que $B_\infty(O,1)$ est le carré "horizontal" de la figure* 1. *Enfin, pour* $(x,y)\in B_1(O,1)$, *on doit raisonner selon que $x\geq 0$ et $y \geq 0$, $x\leq 0$ et $y\leq 0$, $x \geq 0$ et $y \leq 0$, ou, $x\leq 0$ et $y\geq 0$, pour obtenir le carré "penché" $B_1(O,1)$ de la figure* 1 *comme réunion de quatre triangles de sommet l'origine (voir* [1] 1.3.1*).*

La d_0-boule ouverte (resp. fermée), centrée en x et de rayon r, est $\{x\}$ ou E, selon que $r \leq 1$ ou non (resp. selon que $r<1$ ou non).

Pour $f = \mathrm{Arctg}$, *définie sur $\mathbb{R}$,* $B_{d_f}(x,r)$ *est un intervalle ouvert borné ou non (i.e. de la forme* $]a,b[$ *avec* $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$*), selon que* $-\pi/2 < f(x)-r < f(x)+r < \pi/2$ *(alors* $a = \mathrm{tg}(f(x)-r)$ *et* $b=\mathrm{tg}(f(x)+r)$*) ou non (figure* 2*) ; en fait, tout intervalle ouvert est une d_f-boule ouverte : par exemple,* $]a,b[= B_{d_f}(\mathrm{tg}((f(a)+f(b))/2), (f(b)-f(a))/2)$; $]a,+\infty[= B_{d_f}(\mathrm{tg}\, c, c-f(a))$, *où* $(f(a)+\pi/2)/2 < c < \pi/2$.

Pour $f=\mathrm{Arctg}$, *définie sur* $\overline{\mathbb{R}}$, *et* $x \in \mathbb{R}$, $B_{d_f}(x,r)$ *est de la forme* $]a,b[$, $[-\infty, b[$, $]a, +\infty]$, *ou* $\overline{\mathbb{R}}$, *où* $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$ *s'écrivent encore (en posant* $\mathrm{tg}(\pi/2)=+\infty$ *et* $\mathrm{tg}(-\pi/2)=-\infty$*),* $a=\mathrm{tg}(f(x)-r)$ *(si*

$-\pi/2 \le f(x)-r$) et $b=\text{tg}(f(x)+r)$ (si $f(x)+r \le \pi/2$) ; si $x \notin \mathbb{R}$, $B_{d_f}(x,r)$ est de la forme $]a,+\infty]$ (avec $a=\text{tg}(\pi/2-r)$) ou $\overline{\mathbb{R}}$, si $x=+\infty$; ou bien de la forme $[-\infty,b[$ (avec $b=\text{tg}(-\pi/2+r)$) ou $\overline{\mathbb{R}}$, si $x=-\infty$. Se reporter à 0.2.5 où l'on avait signalé que ces boules ouvertes de $\overline{\mathbb{R}}$ étaient des intervalles ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$.

1.3.2 *Pour l'inégalité triangulaire de* $\|\ \|_2$, *utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir* [1] 1.3.1*) ; pour l'inégalité triangulaire de* $\|\ \|_\infty$, *utiliser le fait que* $\sup A \le \alpha$ *ssi* $a \le \alpha$ *pour tout* $a \in A$ *(voir* 0.2.4 *et* [1] 1.3.1*).*

1.3.3 *Pour l'inégalité triangulaire, utiliser les inégalités de Hölder-Minkowski (voir* [1] 1.3.2*).*

1.3.6 *Pour l'expression* $\|A\|=\sup_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, *on peut utiliser* 1.3.5 *avec l'isomorphisme* $M_{m\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n : A \longrightarrow X=(l_1,\cdots,l_m)$, *où* l_i *est la* $i^{\text{ème}}$ *ligne de la matrice* A, *ceci en munissant chacun des facteurs* $\mathbb{R}^n$ *de la norme* $\|\ \|_1$, *puis le produit* $\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n$ *de la norme* $\|\ \|_\infty$ *(voir* 1.3.2*) ; ainsi* $\sup_i \sum_j |a_{ij}|=\sup_i \|l_i\|_1=\|X\|_\infty$ *(sinon, voir* [1] 1.3.4*). De plus, si* $(A_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *et* $(B_{ij})\in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, *et si* $AB=(c_{ij})$, *vérifier que, pour tout* i, *on a* $\sum_{j=1}^p |c_{ij}| \le \|A\|\,\|B\|$ *(sachant que* $c_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$, *on utilise successivement les majorations* $\sum_{j=1}^p |b_{kj}| \le \|B\|$ *et* $\sum_{k=1}^n |a_{ik}| \le \|A\|$*).*

1.3.7 voir [1] 1.3.10 et [1] 1.3.12.

1.3.9 *Pour ces normes, on procède comme pour la norme* $\|\ \|_\infty$ *de* 1.3.8. *Plus pécisément, pour l'axiome* (N_1) *de la norme d'opérateur, on doit vérifier que* $\|u\|=0$ *implique* $u=0$, *i.e.* $u(x)=0$ *pour tout* $x\in E$ *; or,* $\|u\|=0$ *signifie que l'on a* $u(x)=0$ *pour tout* $x\in B'(0,1)$, *où* $B'(0,1)=\{x\in E \mid \|x\|\le 1\}$ *; il reste alors à remarquer que tout* $y\neq 0$ *peut s'écrire* $y=\|y\|(y/\|y\|)$ *avec* $y/\|y\|\in B'(0,1)$, *si bien que* $u(y)=u(\|y\|(y/\|y\|))=\|y\|u(y/\|y\|)=0$ *pour tout* $y\neq 0$, *et donc pour tout* y, *puisque* $u(0)=0$.

Dans le cas particulier où $E=\mathbb{R}^n$ *et* $F=\mathbb{R}^m$, *on obtient, pour tout* $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ *(de matrice* $A_u=(a_{ij})$ *dans les bases canoniques de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}^m$*) et tout* $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ *(en munissant* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}^m$ *de la norme* $\|\ \|_\infty$*),* $\|u(x)\|_\infty=\sup_i |\sum_j a_{ij}x_j| \le \sup_i \sum_j |a_{ij}|\,|x_j| \le \|x\|_\infty \|A_u\| \le \|A_u\|$ *pour tout* x *vérifiant* $\|x\|_\infty\le 1$ *; il reste donc à utiliser* 0.2.4 *pour obtenir* $\|u\|\le\|A_u\|$ *(ce qui prouve déjà que* $\|u\|<+\infty$*). Pour l'inégalité inverse, soit* i_0 *tel que* $\|A_u\|=\sum_j |a_{i_0 j}|$ *(un tel* i_0 *existe puisqu'il s'agit d'un sup fini (voir* 0.2.3*)) et* $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ *défini par* $y_j=1$ *ou* -1, *selon que* $a_{i_0 j}\ge 0$ *ou non ; ainsi* $|a_{i_0 j}|=a_{i_0 j}y_j$, *de sorte que* $\|A_u\|=\sum_j a_{i_0 j}y_j \le \|u(y)\|_\infty \le \|u\|$, *la dernière inégalité résultant du fait que* $\|y\|_\infty\le 1$ *(remarquons, en passant, que l'on a établi* $\|u(x)\|_\infty \le \|x\|_\infty \|u\|$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}^n$, *ce que l'on retrouvera dans* 2.4.3*).*

1.3.14 *Posons* $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *; alors* $B'_\infty(f,r)=\{g\in E \mid \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|\le r\}=\{g\in E \mid \forall x\in[0,1]\ |f(x)-g(x)|\le r\}=\{g\in E \mid \forall x\in[0,1]\ f(x)-r\le g(x)\le f(x)+r\}$. *La seconde égalité est encore vraie si l'on remplace les* $\le$ *par des* $<$ *(il s'agit alors de la* d_∞*-boule ouverte ; cela résulte du fait que* $[0,1]$ *est compact : voir* 5.1.21*). C'est faux dans le cas général (voir* 0.2.4*). La preuve du fait que l'expression* $\|f\|=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$ *définit bien une norme sur l'espace* $C^1([0,1],\mathbb{R})$ *utilise la linéarité de l'opérateur de dérivation* $u(f)=f'$. *La distance associée à cette norme n'est autre que* $\widehat{d}(f,g)=d_\infty(f,g)+d_\infty(u(f),u(g))$ *(voir* 1.1.8*).*

1.3.18 *Si* F *est un sous-espace vectoriel d'un e.v.n.* E, *il vérifie* $\lambda F=F$ *et* $F+y=F$ *pour tout* $y\in F$ *et tout* $\lambda\in\mathbb{R}$. $\inf(1,N)$ *et* $N/(1+N)$ *étant bornées, elles ne peuvent être des normes.*

1.4.4 *Soit* $\|\ \|$ *une norme vérifiant la loi du parallélogramme, notée* (LP) *ici. Posons* $\langle x,y\rangle=(1/2)(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2)=(1/4)(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$ *(la dernière expression est obtenue grâce à* (LP) *; c'est elle que l'on retient pour la simplicité). On voit immédiatement*

que l'application $(x,y)\mapsto <x,y>$ *est symétrique, continue et qu'elle vérifie* $<x,x>=||x||^2$ *et* $<-x,y>=-<x,y>$. *Prouvons que* $<x+x',y>=<x,y>+<x',y>$; *utilisant* (*LP*), *on obtient, pour* $i=1,2$, $||x+x'+(-1)^i y||^2= 2(||x||^2+||x'+(-1)^i y||^2)-||x-x'-(-1)^i y||^2$, *de sorte que* $4<x+x',y>= 8<x',y>+4<x-x',y>$; *en ajoutant à cette égalité son homologue en échangeant* x *et* x', *on obtient l'égalité cherchée. D'après ce qui précède* $<\lambda x,y>=\lambda<x,y>$ *est vraie pour* $\lambda\in\mathbb{Z}$, *et donc aussi pour tout rationnel* $\lambda\in\mathbb{Q}$ *puisque* $<x,y>=n<x/n,y>$ *pour tout* $n\in\mathbb{Z}$; *on passe à un réel* λ *quelconque par un argument de continuité (en utilisant le fait que* $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$). *Ainsi* $<x,y>$ *est un produit scalaire.*

$N(x,y)=\sqrt{x^2+2y^2-2xy}$ *est une norme car* $x^2+2y^2-2xy=(x-y)^2+y^2$ *est une forme quadratique définie positive (voir* 1.4.2 *et* 1.4.3).

S'inspirer de 1.1.5 *et* 1.3.4 *pour prouver que* $B(x,y)=<f(x),f(y)>$ *est un produit scalaire sur* E. *Pour voir que* $tr({}^tAB)$ *est un produit scalaire sur* $M_n(\mathbb{R})$, *il suffit alors de remarquer que, pour tout* $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$, *on a* $tr({}^tAB)=\sum_{i,k} a_{ki}b_{ki}=<\varphi(A),\varphi(B)>$, *où* $\varphi:M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^{n^2}$ *est l'isomorphisme naturel (voir* 0.3.3), $\mathbb{R}^{n^2}$ *étant muni de son produit scalaire euclidien. Par contre,* $tr(AB)$ *n'est pas définie positive : considérer les matrices* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *et* C *le cercle proposé. Bien sûr, si* $X=O$, $d_2(X,C)$ *est atteinte en tous les points de* C *et l'on a* $d_2(X,C)=R$. *Si* $X\neq O$, *posons* $Y=(R/||X||_2)X$; *bien sûr* $||Y||_2=R$, *de sorte que* Y *est le point d'intersection de* C *avec la demi-droite issue de* O *et passant par* X. *Montrons alors que* $d_2(X,C)$ *est atteinte en ce point* Y *de* C. *L'inégalité* $d_2(X,C)\leq||X-Y||_2$ *résulte du fait que* $Y\in C$; *pour l'inégalité inverse, on considère* $Z\in C$ *et l'on écrit* $||X-Z||_2^2=||X||_2^2+||Z||_2^2 -2<X,Z> \geq ||X||_2^2+||Y||_2^2-2<X,Y>=(||X-Y||_2)^2$, *grâce au fait que* $Y,Z\in C$ *et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz* $<X,Z>\leq ||X||_2||Z||_2=R||X||_2=(R/||X||_2)<X,X>=<X,Y>$. *Il reste donc à utiliser* 0.2.4, *puis à remarquer que, si* $X\neq O$, *on a* $||X-Y||_2=|\,||X||_2-||Y||_2|= |\,||X||_2-R|$ *(voir figure* 4 *et* [1] 1.2.3).

1.4.5 *Pour* $x=(x_n)$ *et* (y_n) *dans* l^2 *(donc* $||x||_2=\sqrt{\sum_n x_n^2}<+\infty$ *et* $||y||_2=\sqrt{\sum_n y_n^2}<+\infty$), *on pose* $<x,y>=\sum_n x_n y_n$; *ceci a bien un sens, puisque, pour tout* $N\in\mathbb{N}$, *on a* $\sum_{n=0}^N |x_n y_n|= \sum_{n=0}^N |x_n|\,|y_n|=<x^N,y^N>\leq||x^N||_2\,||y^N||_2\leq||x||_2\,||y||_2$, *en appliquant Cauchy-Schwarz à* $x^N= (x_0,...,x_N)$ *et à* $y^N=(y_0,...,y_N)$ *dans* $\mathbb{R}^{N+1}$. *Puis, en passant à la limite (en* N), *on obtient que la série* $\sum_n x_n y_n$ *est absolument convergente. La preuve que* $<x,y>$ *est un produit scalaire dans* l^2 *est alors immédiate. On considère alors* $x=(1,1,0,0,0,0...)$ *et* $y=(1,-1,0,0,0,0...)$; *bien sûr,* x *et* y *sont dans* $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, *et donc dans tous les* l^p, *et ils vérifient la loi du parallélogramme dans* l^p *ssi* $p=2$.

1.4.7 *Si* H *est un espace préhilbertien, et* $A\subset H$, *on a* $A^\perp=\bigcap_{a\in A}\{a\}^\perp$; *le fait que* $A^\perp$ *soit un sous-espace vectoriel de* H *résultera donc du fait que chaque* $\{a\}^\perp$ *en est un. Mais ceci provient du fait que* $\{a\}^\perp=\overset{-1}{f_a}(\{0\})=Ker(f_a)$, *où* f_a *est l'application linéaire* $H\to\mathbb{R}:x\mapsto<x,a>$. *L'inclusion* $A\subset Vect(A)$ *implique que* $(Vect(A))^\perp\subset A^\perp$; *pour l'inclusion inverse, on considère* $x\in A^\perp$ *et* $y=\sum_i \lambda_i a_i\in Vect(A)$; *on a* $<x,y>=<x,\sum_i \lambda_i a_i>=\sum_i \lambda_i<x,a_i>=0$, *puisque* $x\perp a_i$ *pour tout* i.

1.4.9 *L'unicité de la décomposition* $x=p_F(x)+(x-p_F(x))$ *de* $x\in H$ *dans* $H=F\oplus F^\perp$ *(où* F *est un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien* H) *implique que* $p_F(x)$ *est l'unique élément de* F *tel que* $x-p_F(x)\in F^\perp$. *De plus, on a l'inclusion* $F^{\perp\perp}\subset F$, *l'inclusion inverse étant toujours vraie (voir* 1.4.7) : *soit* $x\in F^{\perp\perp}$; *alors, comme* $x-p_F(x)\in F^\perp$, *on a* $||x-p_F(x)||^2=<x-p_F(x),x-p_F(x)>=<x,x-p_F(x)>-<p_F(x),x-p_F(x)>=0$, *de sorte que* $x=p_F(x)\in F$.

Posons $a=(a_1,...,a_n)$. *On remarque que le sous-espace* F *de* $\mathbb{R}^n$ *proposé s'écrit* $F=\{a\}^\perp= (Vect(\{a\}))^\perp$; *par suite,* $F^\perp$ *est la droite* $\mathbb{R}a$.

$F=\{f\in E|\,f(0)=0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, *puisque c'est le noyau de la forme linéaire* $f\mapsto f(0)$. *Soit* $g\in F^\perp$; *alors* $g=0$: *comme* $g^2\in F^\perp$ *(car, pour tout* $h\in E$ *et tout* $f\in F$,

on a $hf\in F$), on a $<f_n,g^2>=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, où $f_n(x)=nx$ ou 1 selon que $0\leq x\leq 1/n$ ou $1/n\leq x\leq 1$, donc $\int_{1/n}^1 g^2(x)dx=0$, i.e. (puisque g^2 est continue positive; voir 0.4.3) g est nulle sur chaque $[1/n,1]$, et donc sur $]0,1]$; il reste alors à utiliser la continuité de g pour écrire $g(0)=\lim g(1/n)=0$. Ainsi g est nulle sur $[0,1]$; par suite, $F^\perp=\{0\}$, $F^{\perp\perp}=\{0\}^\perp=E\neq F$ et $F+F^\perp=F+\{0\}=F\neq E$.

Toujours dans l'espace préhilbertien $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ ci-dessus, on considère $K=\{f\in E|\ f$ est constante$\}$; alors K est une droite (isomorphe à $\mathbb{R}$; on identifie donc toute fonction constante sur a au réel a) de base orthonormée 1, de sorte que $p_K(f)=<f,1>1=\int_0^1 f(x)dx$ pour tout $f\in E$. D'autre part, orthogonalisons la base g_1,g_2 de G : on pose $\varepsilon_2=g_2+\lambda g_1$ et on calcule λ pour que $\varepsilon_2\perp g_1$, on obtient $\lambda=-<g_1,g_2>/||g_1||^2=-3/4$ et donc $\varepsilon_2=g_2-(3/4)g_1$; il reste alors à normaliser : on obtient une base orthonormée e_1,e_2 dans G en posant $e_1=g_1/||g_1||=\sqrt{3}g_1$ et $e_2=\varepsilon_2/||\varepsilon_2||=(4\sqrt{5})\varepsilon_2=(4\sqrt{5})g_2-(3\sqrt{5})g_1$. Par suite, en utilisant le fait que $\int_0^1 x^n\log x dx=-1/(n+1)^2$ (par intégration par parties; les $f_n(x)=x^n\log x$ sont bien dans E : on les prolonge par continuité en $x=0$ en posant $f_n(0)=0$; c'est vrai en particulier pour $f=f_1$), on obtient $p_G(f)=<f,e_1>e_1+<f,e_2>e_2=3<f,g_1>g_1+80<f,\varepsilon_2>\varepsilon_2=(5/3)g_2-(19/12)g_1$. Enfin, comme $f-p_G(f)\perp p_G(f)$, on a $d^2(f,G)=||f-p_G(f)||^2=<f-p_G(f),f-p_G(f)>=<f-p_G(f),f>=$ $\int_0^1 x^2\log^2 x dx-(5/3)\int_0^1 x^3\log x+(19/12)\int_0^1 x^2\log x dx=\cdots 1/432$.

Partant de la règle de Pythagore dans H : $||x-a||^2=||x-p_F(x)||^2+||p_F(x)-a||^2$, on obtient $||x-a||^2\geq||x-p_F(x)||^2+d^2(p_F(x),A)$ pour tout $a\in A$, et donc, par 0.2.4, $d^2(x,A)\geq ||x-p_F(x)||^2+d^2(p_F(x),A)$. L'inégalité inverse s'obtient, par un raisonnement analogue à partir de l'égalité $||p_F(x)-a||^2=||x-a||^2-||x-p_F(x)||^2$. Pour obtenir l'équation du cylindre Cyl et du tore $\mathbf{T}$, on se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et on applique l'égalité ci-dessus à $A=F=$ l'axe des z pour Cyl, et à $A=C$, le cercle du plan F des x,y pour $\mathbf{T}$. Pour $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a d'une part $p_D(X)=(0,0,z)$, $p_F(X)=(x,y,0)$ et donc $d_2^2(X,D)=||X-p_D(X)||_2^2=x^2+y^2$, puisque $p_D(X)\in D$; et d'autre part $d_2^2(X,C)=||X-p_F(X)||_2^2+d_2^2(p_F(X),C)=z^2+(||p_F(X)||_2-R)^2=z^2+(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2$ (voir figure 5, 1.4.4, [1] 1.2.2, [1] 1.2.6 et [1] 1.2.7).

1.5.4 Sur $\mathbb{R}$, $d_u\leq\alpha d_0$ est impossible (quel que soit $\alpha>0$), puisque d_0 est bornée alors que d_u ne l'est pas (voir 1.1.4); s'il existait un $\beta>0$ tel que $d_0\leq\beta d_u$, on aurait, en particulier, $d_0(0,1/n)\leq\beta d_u(0,1/n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$! (par contre, sur $\mathbb{Z}$, on a $d_0\leq d_u$).

En appliquant la formule des accroissements finis à la fonction Arctg sur $[x,y]$, on obtient $|\operatorname{Arctg} x-\operatorname{Arctg} y|\leq|x-y|$, par suite $d\leq d_u$; par contre, d et d_u ne peuvent être métriquement équivalentes, puisque d est bornée, contrairement à d_u (voir 1.1.4 et 1.1.8).

Remarquer que l'on a $\delta_i\leq 1$ et $\delta_i\leq d$ pour $i=1,2$ (voir [1] 1.4.4).

1.5.7 d_1 et d_∞ sont des distances produit (avec d_0 sur chacun des axes). Par définition d_1 prend les valeurs 0, 1 ou 2, et on a $d_0\leq d_1\leq 2d_0$; de façon évidente, $d_\infty=d_0$.

Pour obtenir $||f||_1\leq||f||_2$, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à 1 et $|f|$ dans l'espace préhilbertien $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ (voir 1.4.4). S'il existait un $\alpha>0$ tel que $||f||_\infty\leq\alpha||f||_1$ pour tout $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, en particulier, on aurait $||f_n||_\infty\leq\alpha||f_n||_1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, où $f_n(x)=x^n$! utiliser la même suite (f_n) pour prouver qu'il n'existe pas non plus de $\alpha,\beta>0$ tel que $||\ ||_\infty\leq\alpha||\ ||_2$ et $||\ ||_2\leq\beta||\ ||_1$.

1.5.8 Le fait que, dans $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, on ait $||\ ||_\infty\leq||\ ||_q\leq||\ ||_p$ lorsque $1\leq p\leq q$, résulte du fait que tout $x=(x_0,\ldots,x_n,0,0,0,\ldots)$ de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ s'identifie à $x^n=(x_0,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, espace dans lequel ces inégalités sont vraies. Pour voir, par exemple que, dans $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, il n'existe pas de $\alpha>0$ tel que $||\ ||_1\leq\alpha||\ ||_\infty$, considérer la suite (x_n) dans $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ définie par $x_n=(1,1,\ldots,1,1,0,0,0,0,\ldots)$, nulle à partie du rang $n+1$ (voir [1] 1.3.10, où l'on travaille plutôt dans $\mathbb{R}[X]\simeq\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$; voir 0.3.3 pour l'isomorphisme ci-contre). Pour les l^p, voir [1] 1.3.12.

Soit $x=(x_n),y=(y_n)\in l^\infty$; on peut alors écrire $\delta(x,y)=\sum_{n=0}^\infty d(x_n,y_n)/2^n\leq\sum_{n=0}^\infty|x_n-y_n|/2^n$ $\leq||x-y||_\infty\sum_{n=1}^\infty 1/2^n=2d_\infty(x,y)$; par contre, ces distances ne sont pas métriquement équiva-

lentes car δ est bornée alors que d_∞ ne l'est pas.

1.5.11 *Seuls H et Cyl sont non bornés (Cyl car z n'est pas borné ; H car $\pi_1(H)=\{x\in\mathbb{R}\mid \exists y\in\mathbb{R}\ y^2-x^2-2xy=1\}=\mathbb{R}$, le discriminant de l'équation en y, $y^2-2xy-(x^2+1)=0$, étant positif). L'équation de El s'écrivant $x^2+2y^2-2xy=(x-y)^2+y^2=1$, on a $(x,y)\in El \Longrightarrow |y|\leq 1$ et $|x|\leq|y|+|x-y|\leq 2$. Comme $(x,y,z)\in\mathbf{T}\Longrightarrow |z|\leq r$ et $|\sqrt{x^2+y^2}-R|\leq r$, on a $R-r\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq R+r$, et donc aussi $|x|,|y|\leq R+r$ ($\mathbf{T}$ est un tore, lorsque $0<r<R$). En fait, remarquant que Cyl est un cylindre, que H est une hyperbole (car la forme quadratique $y^2-x^2-2xy=(y-x)^2-2x^2$ n'est pas de signe constant), que El est une ellipse (car la forme quadratique $x^2+2y^2-2xy=(x-y)^2+y^2$ est définie positive), que $\mathbf{S}^1_2$ est un cercle, que $\mathbf{S}^1_2\star\mathbf{S}^1_2$ est la réunion de deux cercles (car $(x^2+y^2)^2-4x^2=((x+1)^2+y^2-1)((x-1)^2+y^2-1)$; voir figure 6) et que C est l'intersection de deux cylindres (voir [1] 3.1.1 et [1] 3.1.2), on peut aussi raisonner avec 1.2.2 ! même pour le tore $\mathbf{T}$ (lorsque $0<r<R$), d'après 1.4.10.*

1.6.12 *Le fait que l'application $x\mapsto d(x,A)$ est lipschitzienne résulte immédiatement de l'inégalité $|d(x,A)-d(y,A)|\leq d(x,y)$ établie dans 1.1.4.*

Si f est k-lipschitzienne, on a, pour tout $x\in\mathring{I}$ et tout $y\neq x$, $|f(x)-f(y)|/|x-y|\leq k$, ce qui donne $|f'(x)|\leq k$, en faisant tendre y vers x. La réciproque s'obtient en appliquant la formule des accroissements finis à f sur $[x,y]$. On en déduit que les fonctions $f(x)=x^2$ et $h(x)=1/x$ ne sont pas lipschitziennes (respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$). Si la fonction $g(x,y)=xy$ était lipschitzienne, on obtiendrait que $f(x)=x^2$ le serait aussi en se limitant aux points (x,x) !

Pour la fonction $f(x,y)=\sin(x-y)$, on utilise le fait que la fonction $\sin x$ est lipschitzienne (car de dérivée bornée) : l'inégalité $|\sin a-\sin b|\leq|a-b|$ entraîne $|f(x,y)-f(x',y')|\leq|(x-y)-(x'-y')|\leq$ $\leq(|x-x'|+|y-y'|)\leq 2\|(x,y)-(x',y')\|_\infty$; on peut aussi remarquer que f est le composé de deux applications lipschitziennes : $\sin$ et l'application linéaire continue $(x,y)\mapsto x-y$ qui est lipschitzienne, d'après 2.4.1. Pour voir que l'application $g(x,y)=\sin(x^2-y^2)$, elle, n'est pas lipschitzienne, il suffit de se limiter aux points de l'axe des x, puisque l'application $\sin x^2$ n'est pas lipschitzienne (sa dérivée n'est pas bornée).

Soit F un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien H, alors, d'après 1.4.8, il existe un projecteur orthogonal $p_F : H\longrightarrow H$, sur F ; montrons que c'est une application 1-lipschitzienne. Soit donc $x,y\in H$; utilisant la règle de Pythagore et le fait que $x-p_F(x)$ et $y-p_F(y)$ sont orthogonaux à F, on écrit $\|x-y\|^2=\|(x-p_F(x))+(p_F(x)-p_F(y))+(p_F(y)-y)\|^2=$ $\|p_F(x)-p_F(y)\|^2+\|u\|^2$, où $u=(x-p_F(x))-(y-p_F(y))$. Par suite, $\|p_F(x)-p_F(y)\|\leq\|x-y\|$.

Soit $x=(x_n),y=(y_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $n\in\mathbb{N}$; l'inégalité $d(x_n,y_n)/2^n\leq\delta(x,y)$ prouve que la projection $\pi_n:(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\delta)\rightarrow(\mathbb{R},d)$ est 2^n-lipschitzienne. Si maintenant $x,y\in l^p$, on obtient $|x_n-y_n|\leq\|x-y\|_\infty$ ou $|x_n-y_n|^p\leq\sum_{k=0}^{\infty}|x_k-y_k|^p=\|x-y\|_p^p$, selon que $p=\infty$ ou non.

1.6.17 *La première implication est fausse : on considère un ensemble E muni de deux distances d et d' non métriquement équivalentes mais vérifiant $d'\leq\alpha d$ (où $\alpha>0$) ; alors la bijection $id:(E,d)\longrightarrow(E,d')$ est α-lipschizienne, alors que son inverse n'est pas lipschitzienne. Pour l'inverse d'une bijection croissante, voir 0.2.1.*

Chapitre II

2.1.3 *Autant pour d_u que pour d_0, on utilise le fait qu'une suite d'entiers converge vers 0 au sens habituel ssi elle est nulle à partir d'un certain rang (on choisit un $\varepsilon<1$).*

La suite $(-1)^n$ est un exemple de suite non convergente dont l'ensemble $S=\{-1,1\}$ est fini. Ensuite, pour une suite (x_n) convergeant vers x telle que S soit fini, raisonner avec $\varepsilon=\inf_{x\neq x_n} d(x,x_n)$ (on a $\varepsilon>0$ car S est fini).

2.1.14 *Pour les normes usuelles de $M_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$, la suite de matrices carrées (M_k), où M_k a ses termes diagonaux (resp. non diagonaux) égaux à $1+1/k$ (resp. à $1/k$), converge vers le matrice unité dans $M_n(\mathbb{R})$; et la suite de polynômes (P_k) définie par $P_k(X)=1+X/k+\cdots+(X/k)^n$ converge vers 1 dans $\mathbb{R}_n[X]$.*

Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes proposés vérifient $\|P_n\|_1=(n+1)/n$, $\|P_n(X)\|_2=\sqrt{(n+1)/n^2}$, $\|P_n\|_\infty= 1/n$, de sorte que $P_n \to 0$ pour $\| \|_2$ et $| \ |_\infty$, mais pas pour $\| \|_1$; de même, puisque $\|Q_n\|_p=\sqrt{n}\|P_n\|_p$, $Q_n \to 0$ pour $\| \|_\infty$, mais pas pour $\| \|_1$ et $\| \ |_2$.

Dans $C([0,1],\mathbb{R})$, considérer les fonctions $f_n(x)=x^n$ et $g_n(x)=\sqrt{n}x^n$; on a $f_n \to 0$ pour $\| \|_1$ et $\| \|_2$, mais pas pour $\| \|_\infty$; alors que $g_n \to 0$ pour $\| \|_1$ mais pas pour $| \ \|_2$.

2.1.15 *On considère les suites (P_n) et (Q_n) dans $\mathbb{R}[X]$ proposées dans* 2.1.14 *; transportées dans $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ par l'isomorphisme naturel $\varphi:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ défini dans* 0.3.3*, elles donnent les suites (x_n) et (y_n) dans $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ définies par $x_n=(1/n,1/n,\ldots,1/n,0,0,\ldots)$ (ses $n+1$ premiers termes sont égaux à $1/n$, tous les autres sont nuls) et $y_n=\sqrt{n}x_n$. Ces deux suites ont toutes leurs composantes qui convergent vers 0 ; et pourtant, d'après* 2.1.14 *puisque φ est un isomorphisme isométrique (voir* 1.6.12*), ces suites ne convergent pas vers la suite identiquement nulle pour toutes les normes $\| \|_p$ sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. On peut aussi considérer la suite (ϵ_n) définie par $\epsilon_{ni}=1$ ou 0, selon que $n=i$ ou non : c'est une suite dans $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ (donc dans tous les l^p : voir* 1.3.7*) qui vérifie $\epsilon_{ni}\to 0$ pour tout $i\in\mathbb{N}$ (car, pour chaque i fixé, la suite $(\epsilon_{ni})_n$ est nulle à partir d'un certain rang), et qui, pourtant, ne converge vers la suite identiquement nulle pour aucune des normes $\| \|_p$.*

Dans tous les espaces $(l^p,\| \|_p)$, on a $x_n\to x \Longrightarrow \|x_n\|_p\to\|x\|_p$ et, pour tout $i\in\mathbb{N}$, $x_{ni}\to x_i$ (car les normes et les projections sont lipschitziennes : voir 1.6.8, 1.6.12*). La réciproque est vraie dans l'espace préhilbertien $(l^2,\| \|_2)$ (voir* 1.4.5*) : en effet, si la suite (x_n) de l^2 vérifie les deux hypothèses $\|x_n\|_2\to\|x\|_2$ et, pour tout $i\in\mathbb{N}$, $x_{ni}\to x_i$, le fait que $x_n\to x$ dans $(l^2,\| \|_2)$ résultera immédiatement du fait que, pour tout $y\in l^2$, on a $<x_n,y>\to<x,y>$, puisque l'on peut écrire $\|x_n-x\|_2^2=\|x_n\|_2^2+\|x\|_2^2-2<x_n,x>$ (cela résulte aussi de* 2.3.20*) : se donnant alors un $\varepsilon>0$, on trouvera un rang $\widehat{N}$ à partir duquel on a $|<x_n-x,y>|<\varepsilon$, en utilisant le fait que, puisque $y\in l^2$, il existe un entier N tel que $R_N=\sum_{i=N+1}^{\infty}|y_i|^2<\varepsilon^2$; il reste alors à utiliser les hypothèses et la décomposition $<x_n-x,y>=\sum_{i=0}^{\infty}(x_{ni}-x_i)y_i=\sum_{i=0}^{N}(x_{ni}-x_i)y_i+\sum_{i=N+1}^{\infty}(x_{ni}-x_i)y_i$.*

Soit (x_n) la suite dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $x_n=(x_{n0},x_{n1},\ldots,x_{nk},\ldots)$ et $a=(a_0,a_1,\ldots,a_k,\ldots)$. Les projections $\pi_k:(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\delta)\to(\mathbb{R},d)$ étant lipschitziennes (voir 1.6.12*), on a l'implication $\delta(x_n,a)\to 0 \Longrightarrow d(x_{nk},a_k)\to 0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Inversement, supposons que $d(x_{nk},a_k)\to 0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, et soit $\varepsilon>0$; on doit trouver un $N\in\mathbb{N}$ tel que l'on ait $\delta(x_n,a)<\varepsilon$ pour tout $n\geq N$. La série numérique $\sum_{k=0}^{\infty}1/2^k$ étant convergente, il existe un $K\in\mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=K+1}^{\infty}1/2^k<\varepsilon/2$, et donc tel que $\sum_{k=K+1}^{\infty}d(x_{nk},a_k)/2^k<\varepsilon/2$ (car $d\leq 1$). De plus, par hypothèse, pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe un $N_k\in\mathbb{N}$ tel que l'on ait $d(x_{nk},a_k)<2^k\varepsilon/2(K+1)$ pour tout $n\geq N_k$; il suffit donc de se limiter aux $k\leq K$ et de poser $N=\sup(N_0,\ldots,N_K)$.*

2.1.18 *Dans $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$, considérer la suite (f_n) définie ci-dessus dans* 2.1.14 *; elle converge simplement vers la fonction f définie par $f(x)=0$ ou 1 selon que $0\leq x<1$ ou $x=1$; cette convergence n'est pas uniforme puisque, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,1[}x^n=1$ (on peut aussi utiliser* 2.3.21 *puisque les f_n sont continues alors que f ne l'est pas).*

2.1.21 *Dans $C([0,1],\mathbb{R})$, on peut considérer la suite (f_n) de* 2.1.14 *et* 2.1.18 *: elle converge vers 0 pour $\| \|_1$ et $\| \|_2$, mais pas simplement puisque $f_n(1)=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. La suite (h_n), définie par $h_n(x)=-nx+1$ ou 0 selon que $0\leq x\leq 1/n$ ou $1/n\leq x\leq 1$, convient aussi (car $h_n(0)=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$). Fixons un $a\in[0,1]$; dire que l'application $eval_a$ est continue pour la norme $\| \|_p$ (où $p=1$ ou 2) signifierait que l'on a l'implication : $f_n \overset{\| \|_p}{\to} f \Longrightarrow f_n(a)\to f(a)$; or, on a vu ci-dessus que c'était faux pour $a=0$ et $a=1$. Pour $a\in]0,1[$, on peut considérer les fonctions f_n définies par $f_n(x)=\sup(0,1-n|x-a|)$. Par contre, pour la norme $\| \|_\infty$, toutes les applications $eval_a$ (où $a\in[0,1]$)*

sont continues puisque la convergence uniforme implique la convergence simple.

2.2.9 *d' est bien une distance sur $\mathbb{N}$, puisqu'elle s'écrit $d'=(d_u)_h$, avec $h:\mathbb{N}\to\overline{\mathbb{R}}: n\mapsto 1/(n+1)$ (voir 1.1.5). Montrons alors que, dans $\mathbb{N}$, toute suite d'-convergente est stationnaire : $n_k \overset{d'}{\to} n \iff 1/(n_k+1) \overset{d_u}{\to} 1/(n+1) \iff n_k \overset{d_u}{\to} n$; ainsi la suite d'entiers (n_k) est stationnaire (d'après 2.1.3).*

On a déjà vu dans 1.5.4 que d (définie par $d(x,y)=|\operatorname{Arctg} x-\operatorname{Arctg} y|$) n'est pas métriquement équivalente à d_u (bien qu'elle lui soit métriquement comparable). En fait, on a $x_n \overset{d}{\to} x \iff \operatorname{Arctg} x_n \overset{d_u}{\to} \operatorname{Arctg} x \iff x_n \overset{d_u}{\to} x$, la dernière équivalence résultant de la continuité (au sens usuel) des applications Arctg et tg. Ainsi, d est topologiquement équivalente à d_u.

δ_1 et δ_2 sont topologiquement équivalentes puisque métriquement équivalentes (voir 1.5.4) ; comme $\delta_i\leq d$, il suffit de prouver que toute suite δ_2-convergente est d-convergente (ce qui résulte de la continuité, au sens usuel, de l'inverse $g(x)=x/(1-x)$ de la fonction $f(x)=x/(1+x)$ considérée dans 1.1.4 ci-dessus.

2.3.8 *Toute application $f:(E,d_0)\to(E',d')$ est continue (car les d_0-suites convergentes sont les suites stationnaires : voir 2.1.3) et toute partie de E est d_0-bornée (car d_0 est bornée) ; il suffit donc de prendre $E=E'=\mathbb{R}$, $d=d_0$, $d'=d_u$ et $f=id$, puisque d_u n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$. Ou bien, considérer l'application $h:(]0,1[,d_u)\to(]1,+\infty[,d_u): x\mapsto 1/x$, puisque d_u est bornée sur $]0,1[$!*

On considère les fonctions f et g proposées. La continuité pour la distance usuelle d_u étant la continuité au sens habituel, f est continue alors que g ne l'est pas (g n'est pas continue en 0, car $1/n\to 0$ bien que $g(1/n)\not\to 0$) ; si l'on remplace d_u par d (définie par $d(x,y)=|\operatorname{Arctg} x-\operatorname{Arctg} y|$), δ_1 ou δ_2, cela ne change rien, puisque ces distances sont topologiquement équivalentes à d_u (voir 2.2.9). $f,g:(\mathbb{R},d_0)\to(\mathbb{R},d_u)$ sont continues, d'après ce qui précède ; alors que $f,g:(\mathbb{R},d_u)\to(\mathbb{R},d_0)$ sont non continues (considérer la suite $(1/n)$). La bijection $id:(\mathbb{R},d_0)\to(\mathbb{R},d_u)$ est continue, alors que son inverse $id:(\mathbb{R},d_u)\to(\mathbb{R},d_0)$ ne l'est pas.

2.3.11 *Les composantes des fonctions proposées sont continues pour les distances usuelles.*

2.3.13 *L'application proposée est continue hors de l'origine ; par contre, elle ne l'est pas en (0,0), puisque l'application $x\to f(x,x)$ n'est pas continue en 0 (elle vaut 0 ou 1, selon que $x=0$ ou non). Evidemment, l'application partielle $f(x,-)$ est continue pour chaque x fixé ; il en est de même pour $f(-,y)$ (voir [1] 2.2.7).*

2.3.15 *Considérant la bijection $h:\mathbb{N}'\to S'$ définie par $h(n)=1/(n+1)$ ou 0, selon que $n\in\mathbb{N}$ ou non, on voit que $d'=(d_u)_h$ et donc que h est une isométrie bijective $(\mathbb{N}',d')\to(S',d_u)$, si bien que les deux espaces $(\mathbb{N}',d')$ et (S',d_u) sont homéomorphes.*

2.3.16 *Considérer l'application d_u-continue $f(x)=x^2$ (voir 1.6.12), ou bien l'application $id:(\mathbb{R},d_0)\to(\mathbb{R},d_u)$ qui ne sont pas lipschitziennes (voir 1.5.4, 1.6.16 et 2.3.8).*

2.3.18 *Par définition de la continuité, deux distances sur un ensemble qui sont topologiquement équivalentes donnent les mêmes applications continues sur cet ensemble ; inversement si d et d' donnent les mêmes applications continues sur l'ensemble E, la continuité des identités $id:(E,d')\to(E,d)$ et $id:(E,d)\to(E,d')$ résulte respectivement de la continuité des identités $id:(E,d)\to(E,d)$ et $id:(E,d')\to(E,d')$.*

2.3.20 *Toute translation est une application partielle (voir 2.3.12) de l'addition σ.*

Soit $x_n\to x$ et $y_n\to y$ dans un espace préhilbertien ; on obtient $\langle x_n,y_n\rangle\to\langle x,y\rangle$ grâce à la continuité des normes et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir 1.4.2), puisque $|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x,y\rangle| = |\langle x_n-x,y_n\rangle+\langle x,y_n-y\rangle| \leq |\langle x_n-x,y_n\rangle|+|\langle x,y_n-y\rangle| \leq \|x_n-x\|\,\|y_n\|+\|x\|\,\|y_n-y\|$.

Considérer la distance $\hat{d}$ donnée dans 1.1.8*; $f:(E,\hat{d})\to(F,\delta)$ est trivialement 1-lipschitzienne, et, grâce à la continuité de $f:(E,\gamma)\to(F,\delta)$, on a $\hat{d}\overset{Top}{\sim}\gamma$.*

2.3.23 *D'abord, la fonction $f(x)=|x|$, n'est pas de classe C^1 (elle n'est pas dérivable en 0). Les suites décroissantes (f_n) et (g_n), définies par $f_n(x)=\sqrt{x^2+1/n}$, et $g_n(x)=nx^2/2+1/2n$ ou $|x|$ selon que $|x|\leq 1/n$ ou non, répondent à la question (elles vérifient $f\leq f_n$ et $f\leq g_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$; chaque $Gr(f_n)$ est la branche supérieure de l'hyperbole d'équation $y^2-x^2=1/n$; chaque $Gr(g_n)$ "arrondit l'angle de $Gr(f)$" à l'aide d'un "morceau" de parabole, tout en coïncidant avec $Gr(f)$ de plus en plus, quand $n\to+\infty$). En effet toutes ces fonctions sont de classe C^1 (pour g_n, on a $\lim_{x\to 1/n,\, x>1/n} g_n(x)=1/n=g_n(1/n)$ et $\lim_{x\to 1/n,\, x<1/n} g_n'(x)=\lim_{x\to 1/n,\, x>1/n} g_n'(x)=g_n'(1/n)=1$) et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $||f_n-f||_\infty=f_n(0)=1/\sqrt{n}$, et $||g_n-f||_\infty=g_n(0)=1/2n$ (car les fonctions f_n-f et g_n-f sont paires et décroissantes sur $[0,+\infty[$).*

2.4.4 *On obtient l'inégalité $||v\circ u||\leq||v||\,||u||$ grâce au fait que, pour tout $x\in B'(0,1)$, on a $||v(u(x))||\leq||v||\,||u(x)||\leq||v||\,||u||\,||x||\leq||v||\,||u||$.*

On a les inégalités $\sup_{x\neq0}(||u(x)||/||x||)\leq\sup_{||x||=1}||u(x)||\leq\sup_{||x||\leq1}||u(x)||$: la première résulte du fait que, pour tout $x\neq0$, on a $||u(x)||/||x||=||u(x/||x||)||$ avec $x/||x||\in S^1=\{x\in E\mid ||x||=1\}$, et la seconde de l'inclusion $S^1\subset B'(0,1)$ (voir 0.2.4*). Pour l'inégalité $\sup_{x\neq0}(||u(x)||/||x||)\geq\sup_{||x||\leq1}||u(x)||$, on doit vérifier que l'on a $\sup_{x\neq0}(||u(x)||/||x||)\geq||u(x)||$ pour tout $x\in B'(0,1)$; c'est trivialement vrai pour $x=0$; pour $x\neq0$, il suffit de remarquer que l'on a $||u(x)||\leq||u(x)||/||x||$ pour tout $x\in B'(0,1)$.*

2.4.9 *Dans un e.v.n. E, l'addition σ est linéaire, alors que la multiplication externe m est bilinéaire; pour σ, on utilise l'inégalité triangulaire $||x+y||\leq||x||+||y||=||(x,y)||_1$ (ainsi $||\sigma||\leq1$, avec le choix de la norme $||\ ||_1$ sur $E\times E$) ; pour m, on utilise l'égalité $||\lambda x||=|\lambda|\,||x||$ (ainsi $||m||\leq1$). Pour le produit scalaire (bilinéaire) d'un espace préhilbertien, utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Pour tout $x\in E$, l'application linéaire $eval_x$ est $||x||$-lipspschitzienne puisqu'elle vérifie $||eval_x(u)||=||u(x)||\leq||x||\,||u||$ pour tout $u\in\mathcal{L}_c(E,F)$.

Le projecteur orthogonal p_F sur un sous-espace vectoriel F de dimension finie d'un espace préhilbertien étant une application linéaire 1-lipschitzienne (voir 1.4.8 *et* 1.6.12*), on a $||p_F||\leq1$; si $F\neq\{0\}$, en considérant un $x\in F$ vérifiant $||x||=1$ (ça existe : on prend $x=y/||y||$, avec $y\in F-\{0\}$), on obtient aussi $1=||x||=||p_F(x)||\leq||p_F||$.*

$||\ ||_\infty$ est une norme induite sur l'espace $\mathbb{R}[X]$, identifié ici à un sous-espace de $C([0,1],\mathbb{R})$; sinon, on peut dire aussi c'est une norme "image réciproque" (voir 1.3.4*), de la norme $||\ ||_\infty$ sur $C([0,1],\mathbb{R})$, par l'application linéaire injective $\gamma:\mathbb{R}[X]\to(C([0,1],\mathbb{R}),||\ ||_\infty)$ qui, à un polynôme associe sa restriction à $[0,1]$ (voir* 0.3.5*). Les applications u et v étant linéaires, il s'agit de calculer leurs normes d'opérateurs. Pour u, on considère les polynômes $P_n(x)=x^n$ (qui vérifient $||P_n||_\infty=||P_n||_1=||P_n||=1$) ; on obtient : $||u||_\infty=\sup_{||P||_\infty=1}||P'||_\infty\geq\sup_n||P_n'||_\infty=\sup_n n=+\infty$, $||u||_1=\sup_{||P||_1=1}||P'||_1\geq\sup_n||P_n'||_1=\sup_n n=+\infty$ et $||u||=\sup_{||P||=1}||P'||\geq\sup_n||P_n'||=\sup_n n=+\infty$ ... u n'est donc continue pour aucune de ces normes. Pour v, on munit $\mathbb{R}$ de sa norme usuelle $|\ |$; comme $|P(1)|\leq||P||_\infty$ et $|P(1)|\leq||P||_1$, on a $||v||_\infty\leq1$ et $||v||_1\leq1$ (ces inégalités sont en fait des égalités : considérer le polynôme constant sur 1). On obtient $||v||=+\infty$ en considérant les polynômes $Q_n(x)=1+x+\cdots+x^n$. Par suite, v est continue pour les deux premières normes, mais ne l'est pas pour la dernière. L'application w étant linéaire, on procède comme ci-dessus : $|f(0)|\leq||f||_\infty$ implique $||w||_\infty\leq1$ (c'est en fait une égalité : considérer la fonction constante sur 1). Utiliser les fonctions $f_n(x)=-n^2x+n$ ou 0, selon que $0\leq x\leq1/n$ ou $1/n\leq x\leq1$, pour obtenir $||w||_1=||w||_2=+\infty$. Pour l'application linéaire μ, il suffit de remarquer que $|\int_0^1 f(x)dx|\leq||f||_1\leq||f||_p$ pour tout $p\in[1,\infty]$ pour obtenir que $||\mu||_p\leq1$ (c'est en fait encore une égalité) pour tout $p\in[1,\infty]$.*

Pour $u(f)=f'$, on a encore $\|u\|_\infty=\sup_{\|f\|_\infty=1}\|f'\|_\infty=+\infty$ (on procède comme pour l'application $u(P)=P'$ ci-dessus). Par contre, avec le choix de la norme $\|f\|=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$ sur $C^1([0,1],\mathbb{R})$, on a $\|u\|=\sup_{\|f\|=1}\|f'\|_\infty\leq 1$, puisque $\|f'\|_\infty\leq\|f\|$ (en fait, en considérant les fonctions $f_n(x)=x^n$, on obtient aussi $\|u\|\geq 1$).

Soit $u:E\to\mathbb{R}$ une forme linéaire continue non identiquement nulle (on a donc $0<\|u\|<+\infty$) et $x\in E$; d'après 2.4.3, *elle vérifie $|u(x-y)|\leq\|u\|\,\|x-y\|$ pour tout $y\in E$, donc $|u(x)|/\|u\|\leq\|x-y\|$ pour tout $y\in Ker\,u$. Par suite $|u(x)|/\|u\|\leq d(x,Ker\,u)$, d'après* 0.2.4. *Si $d(x,Ker\,u)=0$, c'est même une égalité ; sinon, on a $x\notin Ker\,u$, i.e. $u(x)\neq 0$ et l'inégalité inverse revient à montrer que l'on a $|u(x)|/d(x,Ker\,u)\geq\|u\|=\sup_{z\neq 0}|u(z)|/\|z\|$. Or $|u(x)|/d(x,Ker\,u)\geq|u(x)|/\|x-y\|=|u(x-y)|/\|x-y\|$ pour tout $y\in Ker\,u$; il reste alors à utiliser le fait que, pour tout $z\neq 0$, on a $|u(z)|/\|z\|=|u(z')|/\|z'\|$, où $z'=\lambda z$, avec $\lambda=u(x)/u(z)$, et à prendre $y=-\lambda(z-u(z)e)$, où $e=x/u(x)$ (alors $z'=x-y$; voir* 0.3.4*).*

L'application $\widehat{\phi}:\mathcal{L}_c(E',G)\to\mathcal{L}_c(E,G)$ est un isomorphisme (avec $\widehat{\phi}^{-1}=\widehat{\phi^{-1}}$). C'est aussi une isométrie (voir 1.6.11*) : soit $v\in\mathcal{L}_c(E',G)$; alors $\|v\|=\sup_{\|y\|=1}\|v(y)\|=\sup_{\|\phi(x)\|=1}\|v(\phi(x))\|=\sup_{\|x\|=1}\|v(\phi(x))\|=\|v\circ\phi\|=\|\widehat{\phi}(v)\|$ (où $x=\phi^{-1}(y)$).*

$\mathbb{R}^n$ est muni ici de sa structure euclidienne.

1) *Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a $|u(x)|=|<a,x>|\leq\|a\|_2\,\|x\|_2$ pour tout $x\in\mathbb{R}^n$; par suite, $\|u\|\leq\|a\|_2$. Si $a\neq 0$, on a $a/\|a\|_2\in B'(0,1)$ et donc $\|a\|_2=u(a/\|a\|_2)\leq\|u\|$ (l'égalité résultant du fait que $u(a)=\|a\|_2^2$) ; sinon, $\|u\|=\|a\|_2=0$. De plus, $\|v\|=\sup_{|\lambda|\leq 1}\|v(\lambda)\|_2=\sup_{|\lambda|\leq 1}(|\lambda|\,\|a\|_2)=(\sup_{|\lambda|\leq 1}|\lambda|)\,\|a\|_2=\|a\|_2$.*

2) *Rappelons que tout endomorphisme symétrique u sur $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable (il possède au plus n valeurs propres réelles $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$) dans une base orthonormée (notée $e_1,\ldots,e_n$). Rappelons que, si λ est l'une de ces valeurs propres, il existe un $x\neq 0$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant $u(x)=\lambda x$; par suite, on a $\|u(x)\|_2=|\lambda|\,\|x\|_2$ et donc $\|u\|\geq\|u(x)\|_2/\|x\|_2=|\lambda|$, si bien que $\|u\|\geq\widehat{\lambda}$ (le fait que $\|\;\|_2$ soit la norme euclidienne n'a joué aucun rôle ici). De plus, pour tout $i=1,\ldots,n$ et tout $x\in\mathbb{R}^n$, $u(e_i)=\lambda_i e_i$, $x=\sum_i x_i e_i$ avec $x_i=<x,e_i>$, et $\|x\|_2^2=\sum_i x_i^2$ (voir* 1.4.6*) ; par suite, $\|u(x)\|_2^2=\sum_i\lambda_i^2x_i^2\leq\widehat{\lambda}^2\|x\|_2^2$: d'où $\|u\|\leq\widehat{\lambda}$.*

3) *Posons $u=v^*\circ v$; alors u est symétrique (car $u^*=u$), on conserve donc les notations de* 2)*. Pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ vérifiant $\|x\|_2\leq 1$, on a $\|v(x)\|_2^2=<v(x),v(x)>=<x,u(x)>\leq\|x\|_2\,\|u(x)\|_2\leq\|u(x)\|_2\leq\|u\|$, d'où $\|v\|^2\leq\|u\|$. Pour l'inégalité inverse, on considère l'indice i_0 tel que $\widehat{\lambda}=\lambda_{i_0}$; comme $\|e_{i_0}\|_2=1$, on obtient $\|v\|^2\geq\|v(e_{i_0})\|_2^2=<e_{i_0},u(e_{i_0})>=\lambda_{i_0}\|e_{i_0}\|_2^2=\lambda_{i_0}$. Donc, $\|v\|=\|u\|^{1/2}=\sqrt{\widehat{\lambda}}$.*

Il reste à prouver que $\|v^*\circ v\|=\|v\circ v^*\|$. Posons $u'=v\circ v^*$ et soit $\widehat{\lambda'}$ l'homologue, pour u', du $\widehat{\lambda}$ défini pour u. Si $\widehat{\lambda}\neq 0$, alors $v(e_{i_0})\neq 0$ (car $v^*(v(e_{i_0}))=u(e_{i_0})=\lambda_{i_0}e_{i_0}\neq 0$) ; par suite, $\widehat{\lambda}=\lambda_{i_0}$ est aussi une valeur propre de u' (de vecteur propre $v(e_{i_0})$), si bien que $0<|\widehat{\lambda}|\leq|\widehat{\lambda'}|$ (on a donc $\widehat{\lambda'}\neq 0$). En échangeant v et v^* (et donc $\widehat{\lambda}$ et $\widehat{\lambda'}$), on obtient aussi $0<|\widehat{\lambda'}|\leq|\widehat{\lambda}|$. Si $\widehat{\lambda}=0$, on a aussi $\widehat{\lambda'}=0$ (sinon, voir ce qui précède !). On a donc obtenu $\|v\|^2=\|v^*\circ v\|=|\widehat{\lambda}|=|\widehat{\lambda'}|=\|v\circ v^*\|=\|v^*\|^2$.

Chapitre III

3.1.2 *Soit F un sous-espace vectoriel d'un e.v.n. E, $x=\lim x_n$ et $y=\lim y_n$, avec $x_n,y_n\in F$ et $\lambda\in\mathbb{R}$; on prouve que $x+y$ et λx sont dans $\overline{F}$ en utilisant la continuité des applications σ et m_λ (voir* 2.3.14 *et* 1.6.13*).*

3.1.7 *Tout intervalle I possédant une extrémité ouverte bornée a ne peut être fermé (au sens de* 3.1.6*), puisqu'il vérifie $d(a,I)=0$ bien que $a\notin I$ (voir* 1.1.4*). On a aussi remarqué dans* 1.1.4 *que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $d_u(x,\mathbb{Q})=0$ et $d_u(x,\mathbb{Q}^c)=0$; $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^c$ sont donc denses dans $\mathbb{R}$ (voir* [1] 1.1.1*).*

3.1.9 *Si $A\subset B$, alors $A\subset B\subset \overline{B}$, et donc $\overline{A}\subset\overline{B}$, puisque $\overline{B}$ est fermé et $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Pour les deux autres inclusions, procéder de la même façon avec les inclusions $A_i\subset\bigcup_i A_i$ et $\bigcap_i A_i\subset A_i$, vraies pour tout i (voir* 0.1.2*). Pour voir que ce ne sont pas des égalités, considérer $\mathbb{Q}=\bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\{x\}$ pour la première, et $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^c$ pour la seconde. On a bien l'inclusion $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$, puisque $\overline{A}\cup\overline{B}$ est un fermé qui contient $A\cup B$. Enfin, $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$, puisque $\overline{A}$ est un fermé (voir* [1] 1.1.5*).*

Soit A une partie d'un espace préhilbertien H ; on a $(\overline{A})^{\perp}\subset A^{\perp}$ (car $A\subset\overline{A}$: voir 1.4.7*). Pour l'inclusion inverse, on considère $x\in A^{\perp}$ et $y\in\overline{A}$; on a donc $y=\lim a_n$ avec $a_n\in A$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, si bien que $<x,y>=<x,\lim a_n>=\lim<x,a_n>=0$ car $x\perp a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ (la deuxième égalité résulte de la continuité de l'application $y\mapsto <x,y>$ (voir* 2.3.20 *et* 2.3.12, *ou* 1.6.9*)).*

3.1.16 *Pour l'adhérence des parties bornées, utiliser* 1.2.2 *et* 3.1.9 *et* 3.1.11.

Si I est un intervalle de la forme $[a,b]$, $]-\infty,b]$ ou $[a,+\infty[$, alors I est fermé : en effet, si (x_n) est une suite de points de I qui converge vers x, on obtient $x\in I$ par un passage à la limite dans les inégalités $a\leq x_n\leq b$, $x_n\leq b$ ou $a\leq x_n$. Pour les adhérences, utiliser 3.1.7 *et* 3.1.8 *(voir* [1] 1.1.2*). L'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[1/n,1]$ n'est pas fermé car il est égal à l'intervalle $]0,1]$.*

L'hyperbole H est fermée : si (x_n,y_n) est une suite de points de H qui converge vers (x,y), on obtient que $(x,y)\in H$ en passant à la limite dans l'égalité $x_ny_n=1$ (utiliser 2.1.13*). A (qui est $\mathbb{R}^2$ privé de ses deux axes) n'est pas fermée car on a $(0,y)=\lim(1/n,y)\in\overline{A}$ pour tout $y\neq 0$ (car $(1/n,y)\in A$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$) ; de même on a $(x,0)=\lim(x,1/n)\in\overline{A}$ pour tout $x\neq 0$; enfin $(0,0)=\lim(1/n,1/n)\in\overline{A}$. Comme en rajoutant à A tous ces points adhérents on obtient un fermé (en l'occurrence $\mathbb{R}^2$), on en déduit que $\mathbb{R}^2=\overline{A}$, i.e. que A est dense dans $\mathbb{R}^2$. Par un raisonnement analogue, on obtient que B n'est par fermé et que $\overline{B}=B\cup\{(0,0)\}=B_2'((0,0),1)$ (voir* 1.2.3, 3.1.8 *et* 3.1.11*). Pour prouver que $Gr(f)$ est fermé lorsque $f:(E,d)\to(F,\delta)$ est une application continue, on procède comme pour H ci-dessus (en fait, $H=Gr(h)$, où $h:(\mathbb{R}^*,d_u)\to(\mathbb{R}^*,d_u):x\mapsto 1/x$). De même pour $\Delta_E=Gr(id_E)$.*

Dans $E=C([0,1],\mathbb{R})$, on considère la suite (f_n) définie par $f_n(x)=1/n$ pour tout $x\in[0,1]$: elle d_∞-converge (et donc converge pour d_1 et d_2 aussi, d'après 2.1.14*) vers la fonction identiquement nulle 0. Par suite, $0\in\overline{A}-A$; A n'est donc fermé pour aucune de ces distances et l'on a $d_p(0,A)=0$ pour $p=1,2,\infty$. S'il existait une fonction $f\in A$ en laquelle la distance $d_p(0,A)$ est atteinte, on aurait $||f||_p=d_p(0,A)=0$, i.e. $f=0$, ce qui est impossible, puisque $f\in A$ et $0\notin A$.*

Soit $u:E\to\mathbb{R}$ une forme linéaire ; si $u\equiv 0$, alors $Ker\,u=E$ est fermé. Sinon, ou bien $Ker\,u=\overline{Ker\,u}$ est fermé, ou bien il existe un $x\in\overline{Ker\,u}-Ker\,u$ tel que $E=Ker\,u\oplus\mathbb{R}x$ (voir 0.3.4*). Il reste donc à remarquer que $Ker\,u+\mathbb{R}x\subset\overline{Ker\,u}$ (car $\overline{Ker\,u}$ est un espace vectoriel, d'après* 3.1.2*).*

3.1.24 *Pour prouver l'égalité $d(x,A)=d(x,\overline{A})$, on applique* 3.1.22 *à l'application partielle $d(x,-)$. Soit $Maj(A)$ l'ensemble des majorants d'une partie A de $\mathbb{R}$, non vide et majorée. Alors $Maj(A)$ est non vide (car A est majorée), minorée (car A est non vide) et fermée (par les limites de ses suites convergentes (voir* 3.1.10*)), il suffit donc de lui appliquer* 3.1.18.

3.2.3 *Le fait que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^c$ sont d'intérieur vide résulte du fait qu'ils sont denses dans $(\mathbb{R},d_u)$ (voir* 3.1.7*) et de* 3.2.2 *(voir* [1] 1.1.2*). Pour prouver que tout sous-espace vectoriel propre H d'un e.v.n. est d'intérieur vide, on montre que tout $x\in H$ est adhérent à H^c (utiliser la suite (z_n) définie par $z_n=x+y/n$, où y est un élément de H^c (voir* [1] 1.3.9*)).*

3.2.11 *Pour les premières implications et inclusions, raisonner comme dans* 3.1.9, *mais ici avec* 3.2.6 *(voir* [1] 1.1.5*). Le fait que, dans un espace discret, toute partie est ouverte résulte de* 3.2.5, *puisque toute partie dans un tel espace est fermée (voir* 3.1.16*).*

Tout intervalle I possédant une extrémité fermée bornée a ne peut être ouvert (au sens de 3.2.4*), puisque a n'est pas intérieur à I ; on peut aussi constater que le complémentaire d'un tel intervalle n'est pas fermé (voir* 3.1.7*). Pour $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^c$, on peut aussi utiliser le fait que*

leurs complémentaires ne sont pas fermés (voir 3.1.7*), ou bien qu'ils sont d'intérieur vide (voir* 3.2.3 *et* 3.2.4*). Les intervalles ouverts proposés sont bien des ouverts de* $(\mathbb{R},d_u)$*, puisque leurs complémentaires sont des fermés. Pour le "calcul" des intérieurs d'intervalles, raisonner avec* 3.2.6 *(voir* [1] 1.1.2*).*

La d_u*-frontière d'un intervalle d'extrémités* a *et* b *est* $[a,b]-]a,b[=\{a,b\}$ *; la* d_u*-frontière de* $\mathbb{Q}$ *et de* $\mathbb{Q}^c$ *est* $\mathbb{R}$*, puisque* $\mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{Q}^c$ *sont des parties denses d'intérieur vide dans* $(\mathbb{R},d_u)$*. La* d_0*-frontière de toute partie est vide puisque, dans un espace discret, toute partie est ouverte et fermée.*

La partie A *de* $\mathbb{R}^2$ *est ouverte car pour tout* $(x,y)\in A$*, il existe un* $\varepsilon>0$ *tel que* $B_2((x,y),\varepsilon)\subset A$ *(on choisit* $\varepsilon=\inf(|x|,|y|)$*). L'hyperbole* H *n'est pas ouverte, elle est même d'intérieur vide (tous ses points sont adhérents à* H^c *: si* $(x,y)\in H$*, on peut écrire* $(x,y)=\lim(1+1/n)(x,y)$*, avec* $(1+1/n)(x,y)\in H^c$*). De même,* B *n'est pas ouvert (car tout point de* $S_2^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ *est adhérent à* B^c*) ; comme* $B-S_2^1=B_2((0,0),1)-\{(0,0)\}$ *est un ouvert, on a* $\mathring{B}=B_2((0,0),1)-\{(0,0)\}$ *(voir* 3.2.6*).*

La partie A *de* $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *considérée est ouverte pour* d_∞ *car son complémentaire est fermée pour cette distance (utiliser* 3.1.10*). Par contre* A *n'est pas ouverte pour* d_1 *(considérer la suite* (f_n) *de* A^c *définie par* $f_n(x)=nx$ *ou* 1*, selon que* $0\le x\le 1/n$ *ou* $1/n\le x\le 1$*).*

Enfin, si x *et* y *sont deux points distincts d'un espace métrique, on peut les "séparer" par les deux ouverts disjoints* $B(x,r)$ *et* $B(y,r)$*, où* $r=d(x,y)/2$*.*

3.2.15 *Le complémentaire de toute partie de* $\mathbb{Z}$ *est une réunion d'intervalles ouverts, donc un ouvert.* $\mathbb{Z}$ *est d'intérieur vide car il est inclus dans* $\mathbb{Q}$ *(voir* 3.2.3 *et* 3.2.11*) ; on peut aussi remarquer que* $\mathbb{R}=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n,n+1]=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\overline{]n,n+1[}\subset\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n,n+1[}=\overline{\mathbb{Z}^c}=(\mathring{\mathbb{Z}})^c$ *(pour l'inclusion, voir* 3.1.9*).* S *n'est pas fermé car* $1/n\to 0$ *et* $0\notin S$*. Par contre,* $S'=S\cup\{0\}$ *est fermé car son complémentaire* $S'^c=]-\infty,0[\cup\left(\bigcup_n]1/(n+1)-1/n[\right)\cup]1,+\infty[$ *est une réunion d'intervalles ouverts ; donc* $S'=\overline{S}$*, d'après* 3.1.8*.* S *n'est pas ouvert car* 1 *n'est pas intérieur à* S *(quel que soit* $\varepsilon>0$*, on a* $]1-\varepsilon,1+\varepsilon[\not\subset S$*) ; en fait* S *est d'intérieur vide car il est inclus dans* $\mathbb{Q}$ *qui l'est.* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-1/n,1/n[=\{0\}$*, ça n'est donc pas un ouvert. Considérer enfin la partie de* $\mathbb{R}$ *suivante :* $\mathbb{Q}_-\cup]0,1[\cup]1,2[\cup\{3\}$*, où* $\mathbb{Q}_-=]-\infty,0]\cap\mathbb{Q}$*, elle répond à la dernière question posée (voir* [1] 1.1.3*).*

3.2.17 *Soit* d *la distance sur* $\mathbb{R}$ *définie par* $d(x,y)=|\mathrm{Arctg}\,x-\mathrm{Arctg}\,y|$*. D'après* 1.2.3*, on a* $\mathcal{T}_u\subset\mathcal{T}_d$ *; l'égalité* $\mathcal{T}_u=\mathcal{T}_d$ *résulte du fait que, pour tout* $a,b\in\mathbb{R}$*, on a* $]a,+\infty[=\bigcup_n]a,n[$*,* $]-\infty,b[=\bigcup_n]-n,b[$ *et* $\mathbb{R}=\bigcup_n]-n,n[$*. Si maintenant* $\bar{d}$ *est la distance sur* $\overline{\mathbb{R}}$ *définie par* $\bar{d}(x,y)=|\mathrm{Arctg}\,x-\mathrm{Arctg}\,y|$*, le fait que les boules du type* $]a,b[$*,* $[-\infty,b[$ *et* $]a,+\infty]$*, avec* $a,b\in\mathbb{R}$*, suffisent pour engendrer toutes les* $\bar{d}$*-boules ouvertes décrites dans* 1.2.3*, résulte des égalités ci-dessus et ci-contre :* $[-\infty,+\infty[=\bigcup_n[-\infty,n[$*,* $]-\infty,+\infty]=\bigcup_n]-n,+\infty]$ *et* $\overline{\mathbb{R}}=[-\infty,1[\cup]-1,+\infty]$*. De plus,* $\mathbb{R}$ *est un ouvert de* $\overline{\mathbb{R}}$ *(car son complémentaire dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *est le fermé* $\{-\infty,+\infty\}$*) qui est dense dans* $\overline{\mathbb{R}}$*, puisque les boules ouvertes de* $(\overline{\mathbb{R}},\bar{d})$*, centrées en* $-\infty$ *et* $+\infty$ *(qui sont de la forme* $[-\infty,b[$ *et* $]a,+\infty]$ *: voir* 1.2.3*), rencontrent* $\mathbb{R}$ *(voir* 3.1.4*).*

3.3.5 *L'ensemble des boules fermées centrées en* x *est une base de voisinages de* x *car toute boule ouverte, centrée en* x*, contient une boule fermée, centrée en* x *(il suffit de diminuer le rayon !). Pour voir que, quand* S *est fini, la suite convergente* (x_n) *est stationnaire, considérer l'ouvert* $U=(S-\{x\})^c$*, où* $x=\lim x_n$ *(c'est un ouvert car toute partie finie est fermée). C'est un voisinage de* x*, puisqu'il contient* x*. D'après* 3.3.4*, il existe donc un rang* N *à partir duquel tous les* x_n *sont dans ce* U*. Par suite, pour tout* $n\ge N$*, on a* $x_n\in S\cap U=\{x\}$ *ou* $\emptyset$*, selon que* $x\in S$ *ou non (car* $S-\{x\}=S$ *si* $x\notin S$*) ; par suite,* $x\in S$ *et la suite est stationnaire sur* x*.*

Pour vérifier que l'on a l'équivalence : $x_n\to+\infty$ *dans* $(\overline{\mathbb{R}},\bar{d})$ *ssi* $x_n\to+\infty$ *au sens habituel, considérer les* $\bar{d}$*-voisinages de* $+\infty$ *de la forme* $]\varepsilon,+\infty]$ *pour tout* $\varepsilon>0$ *(voir* 3.3.4*).*

Chapitre IV

4.1.4 *Considérer, par exemple* $h(x,y)=x^2+y^2$ *pour la première,* $h(x,y)=(x^2+y^2)^{1/6}$ *pour la seconde,* $h(x,y)=|xy|$ *pour la troisième et* $h(x,y)=(1/2)|x|$ *pour la quatrième.*

4.1.7 *On a vu dans 3.3.5 que les ensembles des $\bar{d}$-voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ sont respectivement engendrées par les intervalles de la forme $]a,+\infty]$ et $[-\infty,b[$, et que $+\infty$ et $-\infty$ sont adhérents à $\mathbb{R}$ dans $(\overline{\mathbb{R}},\bar{d})$. Il reste donc à appliquer 4.1.1.*

4.2.6 *L'équivalence proposée : 1_A est continue $\Longleftrightarrow$ A est ouvert fermé, résulte des égalités $\overset{-1}{1_A}(\{1\})=A$ et $\overset{-1}{1_A}(\{0\})=A^c$, rappelées dans 0.1.7.*

Pour l'inclusion $\overline{\overset{-1}{f}(A)}\subset \overset{-1}{f}(\overline{A})$, il suffit de remarquer que, puisque $A\subset\overline{A}$, on a $\overset{-1}{f}(A)\subset \overset{-1}{f}(\overline{A})$; on utilise alors le fait que $\overset{-1}{f}(\overline{A})$ est un fermé (car f est continue) qui contient $\overset{-1}{f}(A)$. On peut en déduire la deuxième inclusion, grâce à 3.2.2. Ces inclusions ne sont pas, en général, des égalités : considérer l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ constante sur 0, avec $A=\mathbb{R}^*$ et $B=\{0\}$ (voir [1] 1.1.6).

4.2.8 *En posant $f=d(x,-)$ (c'est une application partielle continue, d'après 1.6.7, 2.3.12 et 2.3.14), on écrit $B_d(x,r)=\overset{-1}{f}(]-\infty,r[)$ et $B'_d(x,r)=\overset{-1}{f}([0,r])$.*

On peut traduire l'équivalence topologique en terme de continuité des identités (voir 2.3.17 et 4.2.5) pour obtenir l'égalité des topologies.

Soit X et Y deux fermés disjoints d'un espace métrique (E,d). Considérer l'application $g:E\to\mathbb{R}$: $x\mapsto d(x,X)-d(x,Y)$ (elle est continue d'après 1.6.12); alors $U=\{x\in E|\,g(x)<0\}$ et $V=\{x\in E|\,g(x)>0\}$ sont des ouverts disjoints qui vérifient $X\subset U$ et $Y\subset V$.

On rappelle que les applications $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ continues au sens habituel sont celles qui sont continues pour les distances usuelles (voir 2.3.5). On écrit $H=\overset{-1}{h}(\{1\})$ (avec $h(x,y)=xy$), $P=\overset{-1}{p}(\{0\})$ (avec $p(x,y)=y-x^2$). Ecrire que $B=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2=n\}$ ne nous est d'aucune utilité, puisqu'une réunion de fermés n'est pas toujours fermée; par contre, B est un fermé car $B^c=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(x,y)\,|\,n<x^2+y^2<n+1\}$ est un ouvert (comme réunion d'ouverts, en utilisant la continuité de l'application $(x,y)\mapsto x^2+y^2$). C est un fermé comme intersection des deux fermés $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2=1\}$ et $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,z=0\}$ (car $(x,y,z)\mapsto x^2+y^2$ et π_3 sont continues); D est un ouvert car il s'écrit $\overset{-1}{h}(\mathbb{R}^*)$; E est un ouvert car on peut l'écrire $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,xy>1$ et $y>0\}$ (c'est donc l'intersection de deux ouverts). F étant une intersection d'un ouvert et d'un fermé, on ne peut conclure; en fait, F n'est pas fermé car $(1,1,0)=\lim(1,1+1/n,0)$, avec $(1,1,0)\notin F$ et $(1,1+1/n,0)\in F$ pout tout $n\in\mathbb{N}^*$; F n'est pas ouvert non plus car son complémentaire n'est pas fermé (considérer $(1,2,0)=\lim(1,2,1/n)$) (voir [1] 1.1.12 et [1] 1.1.13).

Comme $GL_n(\mathbb{R})=\{A\in M_n(\mathbb{R})|\,det(A)\neq 0\}=\overset{-1}{det}(\mathbb{R}^*)$, on en déduit que c'est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ (l'application det est continue car c'est un polynôme en les coordonnées). Pour prouver que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$, on montre que, pour tout $A\in M_n(\mathbb{R})$, les matrices $B_k=A-(1/k)I$ sont inversibles à partir d'un certain rang (en fait pour tous les $k>1/\lambda_0$ où λ_0 est la plus petite des valeurs absolues des valeurs propres réelles non nulles de A : voir [1] 1.3.5); on utilise alors le fait que la suite (B_k) converge vers A (i.e. composante par composante : voir 2.1.14).

L'application $w:E\to\mathbb{R}:f\mapsto f(0)$ est linéaire et continue pour la norme $\|\,\|_\infty$ sur $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ (voir 2.4.9); comme $A=\{f\in E|\,f(0)>0\}=\overset{-1}{w}(]0,+\infty[)$, A est donc un ouvert de $(E,\|\,\|_\infty)$.

Soit E un e.v.n. et $u:E\to\mathbb{R}$ une forme linéaire non identiquement nulle. Si u est continue, alors $Ker\,u=\overset{-1}{u}(\{0\})$ est fermé. Inversement, si $Ker\,u$ est fermé, alors $\overset{-1}{u}(\{1\})$ l'est aussi (c'est l'image du fermé $Ker\,u$ par un homéomorphisme, puisqu'il sécrit $\overset{-1}{u}(\{1\})=a+Ker\,u$, où a est un élément de E qui vérifie $u(a)=1$: voir 0.3.4); son complémentaire $U=\{y\in E\,|\,u(y)\neq 1\}$ étant donc un ouvert qui contient 0, il contient aussi une boule ouverte $B(0,r)$. En fait $B'(0,r)\subset\{y\in E\,|\,u(y)\leq 1\}$

(car $\|y\|\leq r$ *et* $u(y)>1$ *impliquent* $y/u(y)\in B(0,r)\subset U$*, ce qui est absurde puisque* $y/u(y)\in \overset{-1}{u}(\{1\})$*). On a donc* $u(y)\leq 1$ *pour tout* $y\in B'(0,r)$*, si bien que* u *est bornée sur* $B'(0,r)$ *(on a* $|u(y)|\leq 1$ *pour tout* $y\in B'(0,1)$ *puisque* $y\in B'(0,1)$ *ssi* $-y\in B'(0,1)$*), et donc bornée (par* $1/r$*) sur* $B'(0,1)$ *; ainsi* u *est continue (voir* 2.4.1*).*

Si A *est une partie d'un espace préhilbertient* H*, alors* $A^\perp$ *est un fermé de* H *comme intersection de fermés : en effet, on a vu dans* 1.4.7 *que* $A^\perp=\bigcap_{a\in A}\{a\}^\perp$*, avec* $\{a\}^\perp=\overset{-1}{f_a}(\{0\})$*, où* $f_a:H\to\mathbb{R}$ *est l'application continue* $x\mapsto\langle x,a\rangle$ *(voir* 1.6.9*, ou* 2.3.12 *et* 2.3.20*).*

4.2.13 *La continuité de* $g(x)=x^2$ *est bien connue. Elle n'est pas ouverte puisque* $g(\mathbb{R})=[0,+\infty[$*. Soit* F *un fermé de* $\mathbb{R}$*, alors* $g(F)$ *est aussi un fermé de* $\mathbb{R}$*, i.e. toute suite* (x_n) *de* F*, telle que la suite* (x_n^2) *converge (vers* y*), vérifie* $y=x^2$*, avec* $x\in F$ *: en effet, utilisant* 2.1.8*, on sait que* (x_n) *possède une sous-suite* (x_{n_k}) *convergeant vers un* x *((*x_n*) est bornée puisque* (x_n^2) *l'est : c'est une suite convergente).* F *étant fermé, on a* $x\in F$ *; on obtient alors* $x^2=\lim x_{n_k}^2$ *grâce à la continuité de* g*, puis* $y=x^2$*, par unicité de la limite de la suite* (x_{n_k})*.* g *est donc fermée.*

L'application $f=\mathrm{Arctg}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *est continue, non fermée (car* $f(\mathbb{R})=]-\pi/2,\pi/2[$*) et ouverte (utiliser la proposition de* 0.2.5 *puis passer des intervalles ouverts aux ouverts quelconques par réunion, grâce à* 3.2.13 *et au fait que les images directes commutent aux réunions (voir* 0.1.7*)). Le fait que toute bijection croissante* $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *soit un homéomorphisme résulte encore de* 0.2.5 *; pour passer aux bijections continues, on utilise le fait que toute bijection continue est strictement monotone (voir* [1] 1.1.4*).*

Pour établir les égalités proposées, lorsque f *est un homéomorphisme, on utilise le fait que* f *et* f^{-1} *sont ouvertes et fermées (voir* [1] 1.1.6*).*

4.3.3 *Pour prouver les homéomorphismes entre les intervalles ouverts de* $\mathbb{R}$*, se reporter à* 0.2.5*, où l'on a prouvé qu'ils sont équipotents à l'aide de bijections monotones (qui sont des homéomorphismes, d'après* 4.2.13*) ; on procède de même pour les intervalles fermés, qui eux, ne sont pas homéomorphes à* $\mathbb{R}$ *(on le verra pour les intervalles fermés bornés dans* 5.1.15*).*

Dans un e.v.n. (E,N)*, on utilise encore les translations, les homothéties et les symétries, pour les boules ouvertes (resp. fermées) et les sphères. Pour prouver que la boule* $B(0,1)$ *est homéomorphe à* E*, on utilise l'application* $f:E\to E:x\mapsto x/(1+N(x))$ *qui vérifie* $f(E)=B(0,1)$ *(voir* [1] 2.1.15*).*

Pour les hyperboles, constater que $y^2-x^2=(y-x)(y+x)$*, et donc que l'homéomorphisme* $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:(x,y)\mapsto(y+x,y-x)$ *(c'est la similitude de rapport* $\sqrt{2}$ *et d'angle* $-\pi/4$ *... écrire la matrice d'une telle similitude et voir la figure* 7 *; son inverse s'écrit* $\varphi^{-1}(x,y)=((x-y)/2,(x+y)/2)$*) vérifie* $(x,y)\in H'$ *ssi* $\varphi(x,y)\in H$*. Par suite,* $\varphi(H')=H$ *et la restriction de* φ *à* $H'\to H$ *est encore un homéomorphisme.*

Soit N *et* N' *deux normes équivalentes sur un e.v.n.* E *; elles donnent donc toutes deux les mêmes applications continues sur* E *(voir* 2.4.6*). On considère l'application de Gauss :* $g:E-\{0\}\to E:x\to x/N'(x)$ *; elle vérifie* $g(E-\{0\})=S^1_{N'}$ *et donc* $g(S^1_N)=S^1_{N'}$ *; par suite, sa restriction à* $S^1_N\to S^1_{N'}$ *est un homéomorphisme (dont l'inverse s'écrit* $y\mapsto y/N(y)$*). Pour prouver que, dans* $\mathbb{R}^2$*, on a* $S^1_2\simeq El$*, il suffit de remarquer que* El *est la sphère unité, de centre l'origine, pour la norme* $N(x,y)=\sqrt{(x^2/4)+y^2}$ *(voir* 1.4.2*,* 1.4.3*), puisque toutes les normes de* $\mathbb{R}^2$ *sont équivalentes (voir* 5.1.23*) ... on peut aussi remarquer que* $(x,y)\in El$ *ssi* $(x/2,y)\in S^1_2$ *et donc que l'homéomorphisme* $\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:(x,y)\mapsto(x/2,y)$ *vérifie* $\psi(El)=S^1_2$ *; on utilise alors la restriction de* ψ *à* $El\to S^1_2$ *(voir* [1] 2.1.10*).*

Considérons l'application $\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2:\theta\mapsto(\cos\theta,\sin\theta)$ *; elle est continue (car ses composantes le sont) et vérifie* $\varepsilon(]-\pi,\pi[)=S^1_2-\{W\}$*, par suite sa restriction* $\varepsilon_0:]-\pi,\pi[\to S^1_2-\{W\}$ *est une bijection continue. Remarquant que, si* $M=(x,y)\in S^1_2-\{W\}$ *(on a donc* $x\neq-1$*) et* $P=(x,0)$*, et si* θ *est l'angle au centre du cercle trigonométrique* S^1_2 *vérifiant* $\varepsilon_0(\theta)=M$*, on a alors, en posant* $t=\mathrm{tg}\,\theta/2$ *et* $T=(0,t)$ *(comme dans la figure* 8 *de* 4.3.4*),* $\mathrm{tg}\,\theta/2=t=\overline{OT}/\overline{WO}=\overline{PM}/\overline{WP}=y/(1+x)$*, et donc*

$\theta = 2\,\mathrm{Arctg}(y/(1+x))$; *de sorte que l'inverse de la restriction* ε_0 *s'écrit* $\varepsilon_0^{-1}(x,y)=2\,\mathrm{Arctg}(y/(1+x))$. *Cet inverse étant évidemment continu, on en déduit que* ε_0 *est un homéomorphisme. En composant* ε_0^{-1} *avec l'homéomorphisme* $]-\pi,\pi[\to\mathbb{R}:\theta\mapsto \mathrm{tg}\,\theta/2$, *on obtient l'homéomorphisme* $\Phi:\mathbb{S}_2^1-\{W\}\to\mathbb{R}:\ (x,y)\mapsto y/(1+x)$ *(dont l'inverse s'écrit* $\Phi^{-1}(t)=((1-t^2)/(1+t^2),2t/(1+t^2))$, *en utilisant les formules trigonométriques avec l'arc moitié : voir* [1] 2.1.6*).*

4.3.4 *Pour prouver que* $\mathbb{S}_2^1-\{X\}$ *est homéomorphe à* $\mathbb{S}_2^1-\{W\}$ *pour tout* $X\in\mathbb{R}^2$ *(on reprend les notations de* 4.3.3*), on utilise la rotation du plan, de cente* O *et d'angle* $\theta=\widehat{WOX}$ *(elle laisse* $\mathbb{S}_2^1$ *stable et envoie* W *sur* X*). C'est trivialement un homéomorphisme; sa restriction à* $\mathbb{S}_2^1-\{W\}\longrightarrow\mathbb{S}_2^1-\{X\}$ *en est donc encore un.*

4.3.8 *La topologie usuelle de* $\mathbb{R}$ *induit la topologie discrète sur* $\mathbb{Z}$ *car, pour tout* $n\in\mathbb{Z}$, *on a* $\mathbb{Z}\cap]n-1,n+1[=\{n\}$ *(*$\{n\}$ *est donc un ouvert de* $\mathbb{Z}$ *qui n'est pas un ouvert de* $\mathbb{R}$*).*

Par contre, la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ *n'induit pas la topologie discrète sur* $\mathbb{Q}$ *; en effet, s'il existait un intervalle* $]a,b[$ *tel que* $\mathbb{Q}\cap]a,b[=\{x\}$, *cela signifierait que* $]a,b[-\{x\}=]a,x[\cup]x,b[$ *ne serait formé que d'irrationnels, ce qui contredirait la densité de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(voir* 0.2.5 *et* [1] 2.1.2*).*

Les boules ouvertes de $\mathbb{Q}$ *sont de la forme* $\mathbb{Q}\cap]a,b[$, *i.e. l'ensemble des rationnels de* $]a,b[$. *Les boules ouvertes de* $\mathbb{R}\times\{0\}$ *sont de la forme* $]a,b[\times\{0\}$ *(figure* 9*).*

$A=\{(x,y)\in H\,|\,x>0\}=H\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x>0\}$, *A est donc un ouvert de H ; et* $H-A=\{(x,y)\in H\,|\,x<0\}$ *est un ouvert de H, de sorte que A est aussi un fermé de H.*

4.3.12 *Dans* $\mathbb{R}^2$ *muni de sa topologie usuelle, considérer* $A=\mathbb{R}\times\{0\}$ *et* $B=[0,1]\times\{0\}$ *; alors* $\overset{\circ}{B}=\emptyset$ *tandis que* $\overset{\bullet}{B}=]0,1[\times\{0\}\neq A\cap\overset{\circ}{B}$.

4.3.13 *B et A–B sont des ouverts de* $\mathbb{R}^2$ *inclus dans A ; par suite, B est un ouvert fermé de A.* $I=\{(x,y)\in A_1\,|\,y=0\}$, *c'est donc un fermé de* A_1 *; ça n'est pas un ouvert de* A_1, *car sinon, ce serait un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *(comme ouvert d'un ouvert), ce qui est manifestement faux : il est même d'intérieur vide dans* $\mathbb{R}^2$, *et donc dans* A_1, *d'après* 4.3.12. $I=\{(x,y)\in A_2\,|\,x>0\}$, *c'est donc un ouvert de* A_2 *; par contre, ça n'est pas un fermé de* A_2, *puisque ça n'en est pas un de* $\mathbb{R}^2$, *alors que* A_2 *est un fermé de* $\mathbb{R}^2$ *(l'adhérence de I dans* A_2 *est* $\overline{I}=[0,+\infty[\times\{0\}$, *puisque* $\overline{I}\subset A_2$ *; voir* 4.3.12*).* $C=\mathbb{S}_2^1\cup\{(0,0)\}$ *; donc* $B_C((0,0),1)=\{(0,0)\}$, $B'_C((0,0),1)=C$. *Par suite, l'adhérence de* $B_C((0,0),1)$ *dans C est* $\{(0,0)\}\neq B'_C((0,0),1)$ *; et l'intérieur de* $B'_C((0,0),1)$ *dans C est* $C\neq B_C((0,0),1)$ *(voir* [1] 2.1.4*).*

4.3.17 *On ne peut appliquer* 4.3.14 *à g car* $\mathbb{R}=]-\infty,0]\cup]0,+\infty[$ *est un recouvrement de* $\mathbb{R}$ *qui n'est ni ouvert, ni fermé.*

$1_\mathbb{Q}$ *n'est continue en aucun point : cela résulte du fait, établi dans* 3.1.7, *que tout rationnel (resp. tout irrationnel) est limite d'une suite d'irrationnels (resp. de rationnels) ; on utilise alors* 2.3.7. *Par contre, les restrictions de* $1_\mathbb{Q}$ *à* $\mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{Q}^c$ *sont continues, puisque constantes (on ne peut utiliser* 4.3.14, *puisque* $\mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{Q}^c$ *ne sont ni ouverts ni fermés (voir* 3.1.7*).*

Considérer $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:(x,y)\mapsto\sup(x,y)$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x\leq y\}$ *et* $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,y\leq x\}$ *; A et B sont des fermés de* $\mathbb{R}^2$ *qui recouvrent* $\mathbb{R}^2$ *et les restrictions de h à A et B respectivement sont les projections continues* $(x,y)\to y$ *et* $(x,y)\mapsto x$ *; on applique donc* 4.3.14. *Pour l'* inf, *échanger A et B. Ceci dit, une preuve classique de la continuité des applications* sup *et* inf *utilise les égalités* $\sup(x,y)=(x+y+|x-y|)/2$ *et* $\inf(x,y)=(x+y-|x-y|)/2$, *et la continuité de la valeur absolue.*

4.4.6 *On considère la diagonale* $\Delta_F=\{(y,y)\in F\times F\,|\,y\in F\}$, *c'est un fermé de* $F\times F$ *(voir* 3.1.16*) ; il reste donc à écrire* $Gr(f)=\{(x,y)\in E\times F\,|\,(f(x),y)\in\Delta_F\}$ *pour conclure que* $Gr(f)$ *est un fermé de* $E\times F$ *(les composantes de l'application* $(x,y)\mapsto(f(x),y)$ *étant continues). Pour prouver que les droites de* $\mathbb{R}^2$ *proposées sont homéomorphes à* $\mathbb{R}$, *on utilise* 4.4.5. *On peut aussi donner des homéomorphismes* $\mathbb{R}\times\{y\}\to\mathbb{R}\times\{z\}$ *qui sont des restrictions d'homéomorphismes sur* $\mathbb{R}^2$ *: les ap-*

plications $(x,y)\mapsto(x,z)$. *L'hyperbole* $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\ y=1/x\}$ *et la parabole* $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,y=x^2\}$ *sont des graphes d'applications continues, respectivement de sources* $\mathbb{R}^*$ *et* $\mathbb{R}$ *(figure 10).*

Considérons l'application $\alpha:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:(x,y)\mapsto(x,y+f(x))$; *c'est un homéomorphisme qui vérifie* $\alpha(\mathbb{R}\times[0,+\infty[)=f_{\geq}$ *et* $\alpha(\mathbb{R}\times]-\infty,0])=f_{\leq}$; *on a donc, pour la topologie usuelle induite,* $f_{\geq}\simeq\mathbb{R}\times[0,+\infty[\simeq\mathbb{R}\times]-\infty,0]\simeq f_{\leq}$. *On prouve de la même façon que* $f_{>}$ *et* $f_{<}$ *sont homéomorphes à* $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ *et donc à* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$, *d'après* 4.4.3. *Pour les régions paraboliques* P_+ *et* P_-, *on utilise le fait que* $P_+=f_{>}$ *et* $P_-=f_{\leq}$, *où* $f(x)=x^2$.

Utilisant le fait que $\mathbb{R}\simeq]0,1[$, *que* $\mathbf{S}^1_\infty\simeq\mathbf{S}^1_1\simeq\mathbf{S}^1_2\simeq El$ *(voir* 4.3.3*), et que* $Cyl\simeq\mathbf{S}^1_2\times\mathbb{R}$ *(par l'homéomorphisme* $(x,y,z)\mapsto((x,y),z)$*), on obtient les homéomorphismes proposés, grâce à* 4.4.3, *les surfaces en question étant des cylindres de base un cercle, une ellipse, un carré . . . etc.*

Pour $\mathbf{S}^1_2\times\mathbf{S}^1_2\simeq\mathbf{T}$, *considérer l'application continue* $\varphi:\mathbf{S}^1_2\times\mathbf{S}^1_2\to\mathbb{R}^3:((x_1,y_1),(x_2,y_2))\mapsto((R+rx_2)x_1,(R+rx_2)y_1,ry_2)$; *elle vérifie* $\varphi(\mathbf{S}^1_2\times\mathbf{S}^1_2)\subset\mathbf{T}$, *et sa restriction* $\varphi_0:\mathbf{S}^1_2\times\mathbf{S}^1_2\to\mathbf{T}$ *est bijective; il reste à vérifier que l'inverse de cette restriction est aussi continue (voir* [1] 2.2.15*). En fait, comme* $\mathbf{S}^1_2\times\mathbf{S}^1_2$ *est compact (comme produit de compacts), le fait que* φ_0 *est une bijection continue suffit pour dire c'est un homéomorphisme (inutile donc en fait de se soucier de l'écriture précise de* φ_0^{-1}*); voir* 5.1.13.

4.4.12 *Un pavé fermé* $F\times F'$ *est fermé puisqu'il s'écrit* $\overset{-1}{\pi}(F)\cap\overset{-1}{\pi'}(F')$. *Par suite,* $\overline{A\times A'}\subset\overline{A}\times\overline{A'}$; *l'inclusion inverse est évidente avec les suites. L'inclusion* $\mathring{A}\times\mathring{A'}\subset\overbrace{A\times A'}^{\circ}$ *résulte du fait que* $\mathring{A}\times\mathring{A'}$ *est un (pavé) ouvert inclus dans* $A\times A'$. *Pour l'inclusion inverse, on considère* $(x,x')\in\overset{\circ}{\overbrace{A\times A'}}$; *comme* $\overset{\circ}{\overbrace{A\times A'}}$ *est un voisinage ouvert de* (x,x'), *on sait, par* 4.4.10, *qu'il existe un pavé ouvert* $U\times U'$ *vérifiant* $(x,y)\in U\times U'$ *et* $U\times U'\subset\overset{\circ}{\overbrace{A\times A'}}\subset A\times A'$, *et donc vérifiant* $x\in U\subset\mathring{A}$ *et* $x'\in U'\subset\mathring{A'}$, *puisque* U *et* U' *sont des ouverts respectivement inclus dans* A *et* A'. *Par suite* $(x,x')\in\mathring{A}\times\mathring{A'}$.

On écrit $\delta(A)=\sup_{(x,y)\in A\times A}d(x,y)=\sup_{(x,y)\in\overline{A\times A}}d(x,y)=\sup_{(x,y)\in\overline{A}\times\overline{A}}d(x,y)=\delta(\overline{A})$, *en utilisant* 3.1.22, 3.1.23 *et la continuité des distances.*

Vérifions que la première projection π *est ouverte. Les pavés ouverts engendrant la topologie produit (et les images directes commutant aux réunions), il suffit de vérifier que* $\pi(U\times V)$ *est un ouvert; mais c'est immédiat, puisque* $\pi(U\times V)=\emptyset$ *ou* U, *selon que* $V=\emptyset$ *ou non. Par contre,* π *n'est pas fermée puisque* $\pi(H)=\mathbb{R}^*$, *où* $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,xy=1\}$. *De la même façon, l'addition* σ *d'un e.v.n. est ouverte, puisque* $U+V=\bigcup_{y\in V}U+y=\bigcup_{y\in V}\tau_y(U)$, *où* τ_y *est la translation "+y" (elle est ouverte, puisque c'est un homéomorphisme; voir* 2.3.20*). Pour voir que* σ *n'est pas fermée, considérer* $H+D$, *où* $D=\mathbb{R}\times\{0\}$ *(voir* [1] 1.3.8*).*

Un produit d'espaces discrets est discret : il est engendré par les pavés ouverts $\{x\}\times\{y\}=\{(x,y)\}$ *(on a aussi remarqué dans* 1.5.7 *que la distance produit* $d_\infty((x,y),(x',y'))=\sup(d_0(x,x'),d_0(y,y'))$ *est égale à* d_0*).*

La diagonagale Δ_E *d'un espace métrique est fermée car son complémentaire est voisinage de chacun de ses points : en effet, si* (x,y) *vérifie* $x\neq y$, *on sait qu'il existe deux ouverts disjoints* U *et* V *vérifiant* $x\in U$ *et* $y\in V$ *(tout espace métrique étant séparé (voir* 3.2.11*)), il existe donc un pavé ouvert* $U\times V$, *inclus dans* Δ^c, *qui contient* (x,y).

Utilisant 4.4.11 *et le fait que la topologie usuelle de* $\mathbb{R}$ *induit la topologie discrète sur* $\mathbf{2}$, *on en déduit que la topologie produit sur* $\mathbb{R}\times\mathbf{2}$ *est induite par la topologie usuelle de* $\mathbb{R}^2$. $\mathbb{R}\times\{0\}$ *et* $\mathbb{R}\times\{1\}$ *sont des pavés ouverts fermés de* $\mathbb{R}\times\mathbf{2}$; *ce sont aussi des pavés fermés de* $\mathbb{R}^2$, *par contre, ils sont d'intérieur vide dans* $\mathbb{R}^2$. *On utilise* 4.3.15 *pour prouver que* $\mathbb{R}\times\mathbf{2}\simeq\mathbb{R}^*$, *en écrivant* $\mathbb{R}\times\mathbf{2}=(\mathbb{R}\times\{0\})\cup(\mathbb{R}\times\{1\})$ *et* $\mathbb{R}^*=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$, *sachant que* $\mathbb{R}\times\{0\}\simeq\mathbb{R}\times\{1\}\simeq\mathbb{R}\simeq]-\infty,0[\simeq]0,+\infty[$ *(voir* [1] 2.2.11*). Pour* $\mathbb{R}\text{-}\mathbb{Z}\simeq\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$, *on utilise à nouveau* 4.3.15 *en écrivant* $\mathbb{R}\text{-}\mathbb{Z}=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n,n+1[$ *et* $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{R}\times\{n\}$, *sachant que, pour tout* $n\in\mathbb{Z}$, *on a* $]n,n+1[\simeq\mathbb{R}\simeq\mathbb{R}\times\{n\}$ *(voir* [1] 2.2.12*).*

Chapitre V

5.1.3 *Soit E un ensemble infini ; il contient donc une partie dénombrable, de sorte qu'il existe une injection $f:\mathbb{N}\to E$. La suite $(f(n))$ ayant tous ses termes distincts, elle ne possède aucune sous-suite d_0-convergente (i.e. stationnaire) ... et pourtant, elle est d_0-bornée ! (voir* 5.1.27*).*

On considère, dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\ \|_\infty$, la suite (f_n) proposée dans 2.1.14 *; elle ne possède aucune sous-suite convergente (uniformément), puisque, entre autre, elle vérifie $\|f_n\|_\infty=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ ... et pourtant, elle est bornée ! (voir* 5.1.27*).*

5.1.9 *Une partie finie est compacte comme réunion finie de ses points (un espace réduit à un point est évidemment compact puisqu'il ne possède qu'une seule suite : la suite constante sur ce point). Pour d_u, S et S' sont bornés (car inclus dans $[0,1]$) ; cependant S' est compact alors que S ne l'est pas (car S' est fermé contrairement à S : voir* 3.2.15*). Toujours pour d_u, $\mathbb{R}$ n'est pas compact, et pourtant il s'écrit $\mathbb{R}=\bigcup_n[-n,n]$, chacun des $[-n,n]$ étant compact.*

5.1.15 *Parmi les intervalles de $\mathbb{R}$ proposés, seul l'intervalle $[a,b]$ est compact.*

Pour prouver que $(\overline{\mathbb{R}},\overline{d})$ et $(\mathbb{N}',d')$ sont compacts, il suffit d'utiliser 5.1.11 *avec les homéomorphismes $(\overline{\mathbb{R}},\overline{d})\simeq([-\pi/2,\pi/2],d_u)$ et $(\mathbb{N}',d')\simeq(S',d_u)$ de* 2.3.15.

Pour prouver que $S'=S\cup\{x\}$ est compact lorsque $x_n\xrightarrow{d}x$, il suffit d'écrire $S'=h(N')$ où $h:\mathbb{N}'\to E$ est défini par $h(n)=x_n$ ou x selon que $n\in\mathbb{N}$ ou non (voir 5.1.10*) : l'application $h:(\mathbb{N}',d')\to(E,d)$ est évidemment continue puisque sa restriction à $\mathbb{N}$ l'est (la topologie induite par $\mathcal{T}_{d'}$ sur $\mathbb{N}$ étant la topologie discrète, d'après* 2.2.9*), et h est continue au point $+\infty$ (car, pour tout $r>0$, la boule ouverte $B=B_d(x,r)$ est telle que l'ensemble $(\overset{-1}{h}(B))^c=\overset{-1}{h}(B^c)=\{n\in\mathbb{N}\mid x_n\notin B\}$ est fini, puisque $x_n\xrightarrow{d}x$, de sorte que $(\overset{-1}{h}(B))^c$ est compact, donc fermé dans $(\mathbb{N}',d')$; son complémentaire $\overset{-1}{h}(B)$ est donc un ouvert de $(\mathbb{N}',d')$).*

A est compact puisqu'il s'écrit $A=f([0,2\pi])$, où $f(\theta)=(\cos 2\theta,\sin 3\theta)$; voir [1] 3.1.1.

5.1.19 *La sphère $\mathbb{S}_2^1$ est compacte car : c'est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, ou bien car elle s'écrit $\varepsilon([0,2\pi])$ où $\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2:\theta\mapsto(\cos\theta,\sin\theta)$, ou bien encore car $\mathbb{S}_2^1=C_1\cup C_2$ où $C_i=Gr(f_i)$ et $f_i:[-1,1]\to\mathbb{R}:x\mapsto(-1)^i\sqrt{1-x^2}$ (f_i étant continue, on a $C_i\simeq[-1,1]$) ; elle ne peut donc être homéomorphe à $\mathbb{R}$ qui ne l'est pas. Les exemples de* 1.5.11 *sont tous fermés ; par contre, on a vu dans* 1.5.11 *que seuls $\mathbb{S}_2^1$, El, $\mathbb{S}_2^1 * \mathbb{S}_2^1$, C et $\mathbf{T}$ sont bornés, et donc compacts (pour le tore $\mathbf{T}$, on pouvait aussi utiliser* 5.1.11 *et* 5.1.16 *avec l'homéomorphisme $\mathbf{T}\simeq\mathbb{S}_2^1\times\mathbb{S}_2^1$ établi dans* 4.4.6*).*

Considérons l'application $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)$. Elle est continue (car ses composantes le sont) et vérifie $\varphi(E)=F$ (figure 11*) ; sa restriction à $E\to F$ est donc une bijection continue, et même (voir* 5.1.13*) un homéomorphisme, puisque E est compact (c'est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$; on peut dire aussi que c'est un produit de compacts) ; voir* [1] 3.3.1.

Dans l'exemple précédent on peut dessiner E et F (et donc avoir une intuition géométrique du problème). Pour X, on va utiliser l'application de Gauss $g:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y)=(1/\|(x,y)\|_2)(x,y)=(x/\sqrt{x^2+y^2},y/\sqrt{x^2+y^2})$ (les points (x,y) et $g(x,y)$ sont portés par la même demi-droite issue de l'origine) ; elle est continue et vérifie $g(\mathbb{R}^2-\{(0,0)\})\subset\mathbb{S}_2^1$, et donc $g(X)\subset\mathbb{S}_2^1$, de sorte que l'on a une restriction continue (pour la topologie usuelle induite) $g:X\to\mathbb{S}_2^1$. Il suffit donc, d'après 5.1.13 *(puisque X est manifestement compact), de montrer que cette restriction est bijective pour conclure : pour $(u,v)\in\mathbb{S}_2^1$, il suffit de remarquer que la demi-droite $D^+_{(u,v)}$, issue de l'origine et passant par (u,v), rencontre X en un seul point (on utilisera le fait que, pour $u\neq0$, la droite $D_{(u,v)}$ passant par $(0,0)$ et (u,v) a pour équation $y=tx$ où $t=v/u$).*

Soit A et B deux parties d'un e.v.n. E. Si A et B sont compactes, la compacité de $A+B$ résulte du fait que $A+B=\sigma(A\times B)$, où σ est l'addition de E (voir 1.6.13*). Si maintenant A est compact et B seulement fermé, on montre que $A+B$ est fermé pour les limites de ses suites*

convergentes : soit (z_n) une suite de points de $A+B$ (on a donc $z_n=x_n+y_n$, avec $x_n\in A$ et $y_n\in B$, pour tout $n\in\mathbb{N}$) qui converge vers un z de E ; il s'agit de prouver que $z=x+y$, avec $x\in A$ et $y\in B$. Comme A est compact, la suite (x_n) possède une sous-suite (x_{n_k}) convergente dans A ; il reste alors à poser $x=\lim x_{n_k}$ et $y=z-x$ (voir [1] 3.5.3*).*

5.1.21 *A priori, $B_\infty(f,r)=\{g\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \mid \sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|<r\} \subset \{g\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \mid \forall x\in[0,1]\ |f(x)-g(x)|<r\}$, mais comme $|f-g|$ est continue, elle est bornée et atteint sa borne supérieure sur le compact $[0,1]$; l'inclusion ci-dessus est donc une égalité (c'est faux en général : voir* 0.2.4*).*

Le fait qu'un espace métrique compact (E,d) est borné résulte du fait que sa distance $d:E\times E\to\mathbb{R}$ est continue (voir 1.6.7*), donc bornée sur le compact $E\times E$.*

Soit $E=[0,1[\cup\{2\}$, que l'on munit de la distance usuelle ; alors $[0,1[$ est un fermé de E (car $[0,1[=E\cap[0,1]$, où $[0,1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$) qui est d_u-borné et $d_u(2,[0,1[)=1$ n'est atteinte en aucun point de E.

Soit (X_1,X_2,X_3) un triangle dont chaque sommet X_i est dans une boule euclidienne fermée B'_i, ces boules étant deux-à-deux disjointes. On considère alors l'application $per:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ définie par $per(X,Y,Z)=d_2(X,Y)+d_2(Y,Z)+d_2(Z,X)$; étant continue elle atteint sa borne inférieure sur le compact $B'_1\times B'_2\times B'_3$ (voir [1] 3.2.6*).*

5.1.28 *On rappelle qu'une matrice $A=(a_{ij})$ de $M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale ssi elle vérifie les équations polynômiales $\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}=1$ ou 0, selon que $i=j$ ou non (lorsque $i,j=1,\dots,n$). Par suite, $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$; $O_n(\mathbb{R})$ est aussi borné puisque les équations $\sum_{k=1}^n a_{ki}^2=1$, vraies pour tout $i=1,\dots,n$, impliquent $|a_{ki}|\le 1$ pour tout $k,i=1,\dots,n$.*

On considère la boule $B'_\infty(0,1)$ de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$; c'est un fermé borné (pour la norme $\|\,\|_\infty$), et pourtant, elle n'est pas compacte puisqu'elle possède une suite qui ne possède aucune sous-suite convergente (voir 5.1.3*).*

Posons $d=d(x,F)$; d'après 0.2.4*, on sait que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un $z_n\in F$ tel que $d\le\|x-z_n\|<d+1/n$. La suite (z_n) étant bornée dans F de dimension finie, elle possède une sous-suite (z_{n_k}) convergente dans F ; posant $y=\lim_k z_{n_k}$, on obtient $d=\|x-y\|$ en faisant $k\to+\infty$ dans $d\le\|x-z_{n_k}\|<d+1/n_k$ (vraie pour tout $k\in\mathbb{N}$). Pour voir que ce y n'est pas forcément l'unique élément de F vérifiant $d(x,F)=\|x-y\|$, prendre pour F l'axe des y dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\,\|_\infty$; alors $d((1,0),F)=1=\|(1,0)-(0,y)\|_\infty$ pour tout $y\in[-1,1]$!*

5.1.30 *Tout sous-espace vectoriel F d'un e.v.n. E est une intersection d'hyperplans H_i, chacun de ces H_i étant le noyau d'une forme linéaire $u_i:E\to\mathbb{R}$ (voir* 0.3.4*). Si E est de dimension finie, on sait que toutes les u_i sont continues (voir* 5.1.29*), si bien que tous les H_i sont fermés (voir* 4.2.8*) ; par suite, $F=\bigcap_i H_i$ est aussi fermé.*

5.2.5 *La suite (x_n) étant convergente, sa limite 0 est son unique valeur d'adhérence (on a ici $0\in\overline{S}=S'$). Pour la suite (y_n), $S=\mathbb{N}$ est fermé, donc ses valeurs d'adhérences sont dans $\mathbb{N}$; en fait 0 est l'unique valeur d'adhérence (car $0=\lim y_{2n+1}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S\cap]n-1,n+1[=\{n\}$). Enfin, remarquant que $-1=\lim z_{2n+1}$ et $1=\lim z_{2n}$, on sait que -1 et 1 sont des valeurs d'adhérences de la suite (z_n) ; ce sont en fait les seules, puisque $S=\{-1,1\}$ est fermé (voir* [1] 1.5.12 *; et aussi* [1] 1.5.13 *et* [1] 1.5.14*, où l'on donne des exemples de suites de réels avec une infinité, dénombrable ou non, de valeurs d'adhérences).*

5.2.14 *La suite (n) ne possède aucune valeur d'adhérence (tout comme les exemples de* 5.1.3*) ; les suites (y_n) et (z_n) de* 5.2.5 *vérifient $Adh\subset S$; la suite (x_n) de* 5.2.5 *vérifie $S\cap Adh=\emptyset$ (il en est de même pour la suite (a_n), définie par $a_n=(-1)^n/n$, qui permet aussi de répondre par la négative aux questions posées).*

Soit (x_n) une suite de points d'un espace métrique ; utilisant 5.2.12*, on a $S\cup Adh\subset\overline{S}$. Pour l'inclusion inverse, il suffit de prouver que $\overline{S}\cap Adh^c\subset S$. Or, si $x\in Adh^c$, on sait qu'il existe un*

voisinage V *de* x *qui ne contient qu'un nombre fini de* x_n *; mais alors, si l'on a aussi* $x\in\overline{S}$, *i.e. s'il existe une suite* (y_k) *dans* S *qui converge vers ce* x, *l'ensemble* $Y=\{y_k \mid k\in\mathbb{N}\}$ *est forcément fini (car* $Y\cap V$ *et* $Y\cap V^c$ *sont finis), si bien que* $x\in Y\subset S$ *(voir* 2.1.3 *et* 3.3.5*).*

5.2.19 *Les intervalles* $[n,+\infty[$ *forment une suite décroissante de fermés non vides de* $(\mathbb{R},d_u)$ *dont l'intersection est vide.*

Soit E *un métrique compact,* U *un ouvert de* E *et* (F_n) *une suite décroissante de fermés de* E *vérifiant* $\bigcap_n F_n\subset U$, *i.e.* $\bigcap_n(F_n\cap U^c)=(\bigcap_n F_n)\cap U^c=\emptyset$ *; alors il existe un* n *tel que* $F_n\cap U^c=\emptyset$, *puisque les* $F_n\cap U^c$ *forment une suite décroissante de fermés dans le compact* E. *Cela ne marche pas si* U *n'est pas ouvert : considérer, dans le compact* $[0,1]$, $U=\{0\}$ *et* $F_n=[0,1/n]$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$ *(voir* [1] 3.6.15*). Déduisons-en* 5.2.7 *: soit* (x_n) *une suite de point de* E *qui ne possède qu'une seule valeur d'adhérence* a, *et* V *un voisinage ouvert de* a. *Avec les notations de* 5.2.12, *on a donc* $\bigcap_n \overline{A_n}=Adh=\{a\}\subset V$ *; par suite, il existe un* $n\in\mathbb{N}$ *tel que* $\overline{A_n}\subset V$, *et donc tel que* $A_n\subset V$, *i.e. tel que l'on ait* $x_p\in V$ *pour tout* $p\geq n$. *Ceci prouve que la suite* (x_n) *converge vers* a *(voir* 3.3.4*).*

Enfin, si $f:E\to F$ *est continue (où* E *et* F *sont des espaces métriques) et* (K_n) *une suite décroissante de compacts non vide de* E, *on sait déjà que* $\bigcap_n K_n$ *est un fermé non vide du métrique compact* K_0 *et donc de* E. *L'inclusion* $f(\bigcap_n K_n)\subset\bigcap_n f(K_n)$ *allant de soi, il s'agit de prouver l'inclusion inverse. Soit donc* $y\in\bigcap_n f(K_n)$ *et* $x_n\in K_n$ *tel que* $y=f(x_n)$ *pour tout* n. *La suite* (x_n) *se situant dans le compact* K_0, *elle possède une valeur d'adhérence* x *; il reste alors à vérifier que* $x\in\bigcap_n K_n$ *et que* $y=f(x)$. *C'est faux avec des* K_n *seulement fermés : considérer* $E=F=\mathbb{R}$, f *la fonction constante sur* 0 *et* $K_n=[n,+\infty[$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *(voir* [1] 3.6.16*).*

5.2.23 *On considère le recouvrement ouvert* $\mathbb{R}=\bigcup_n]-n,n[$ *; si l'on pouvait en extraire un sous-recouvrement fini, cela signifierait que* $\mathbb{R}$ *est inclus dans l'un des* $]-n,n[$ *! (même raisonnement pour* $\mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{Q}$ *en remplaçant l'égalité par une inclusion). Si* $A=\{x_1,\dots,x_n\}$ *est une partie finie d'un espace métrique* E, *et si* $A\subset\bigcup_i U_i$ *où les* U_i *sont des ouverts de* E, *alors* $A\subset U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_n}$, *où* $x_k\in U_{i_k}$ *pour chaque* $k=1,\dots,n$. *Si maintenant* E *est un espace discret compact, on considère le recouvrement ouvert* $E=\bigcup_{x\in E}\{x\}$ *; par hypothèse, il existe une partie finie* E_0 *de* E *telle que* $E=\bigcup_{x\in E_0}\{x\}=E_0$, *ce qui prouve que* E *est fini.*

5.2.25 *On applique* 5.2.24, *car* $(1/n,1-1/n)\to(0,1)$ *et* $B=B_1\cup B_2$, *où* $B_1=\{1/n \mid n\in\mathbb{N}^*\}\cup\{0\}$ *et* $B_2=\{1-1/n \mid n\in\mathbb{N}^*\}\cup\{1\}$ *(voir* [1] 3.6.4*).*

5.3.7 *Tout point* x *d'un espace discret possède voisinage compact :* $\{x\}$ *(voir* 5.1.9*).*

Tout e.v.n. de dimension finie est localement compact, puisque tout point d'un tel espace possède une base de voisinages compacts : les boules fermées centrées en ce point (voir 5.1.26 *et* 5.3.2*) ; on a déjà vu dans* 5.1.3 *qu'un e.v.n. non réduit à* $\{0\}$ *ne peut être compact. Un cylindre est métrique localement compact comme fermé (car défini par une équation) d'un localement compact (on en voit un exemple, dans* 4.4.6, *qui est homéomorphe à* $\mathbb{S}_2^1\times\mathbb{R}$, *lui-même localement compact comme produit de localement compacts), non compact (car non borné).*

Le complémentaire d'un compact d'un e.v.n. de dimension finie étant un ouvert d'un localement compact, c'est donc un localement compact (voir 5.1.6 *et* 5.3.3*).*

On a vu dans 2.3.15 *que* $(\mathbb{N},d_u)\simeq(S,d_u)$ *; or* $(\mathbb{N},d_u)$ *est localement compact non compact : il est localement compact car fermé dans* $\mathbb{R}$ *qui l'est ; il n'est pas compact car il n'est pas borné.*

0 *est le seul point de* S^c *qui ne possède pas de voisinage compact dans* S^c, *puisque, d'une part,* $S'=S\cup\{0\}$ *est compact (voir* 5.1.9*), et, d'autre part, si* V *est un voisinage de* 0 *dans* S^c, *on montre que* V *ne peut être fermé dans* $\mathbb{R}$ *(ni compact, donc) : en effet, les* $]-\varepsilon,\varepsilon[$ *formant une base de voisinages de* 0 *dans* $\mathbb{R}$ *(voir* 3.3.3*), il existe un* $\varepsilon>0$ *tel que* $(S^c\cap]-\varepsilon,\varepsilon[)\subset V$ *;* V *contient donc un intervalle* $]1/(n+1),1/n[$, *où* $n\in\mathbb{N}^*$ *vérifie* $1/n<\varepsilon$. *Il reste alors à remarquer que* $1/n\in\overline{V}-V$ *(voir* [1] 3.4.1*). L'égalité* $S^c=\{0\}\cup(S')^c$ *prouve que les localement compacts ne sont pas stables par réunions ; pour leur non stabilité par intersections infinies, considérer l'égalité* $S^c=\bigcap_n(\mathbb{R}-\{1/n\})$.

Soit V un voisinage de 0 dans $\mathbb{Q}$ et $\varepsilon>0$ vérifiant $(\mathbb{Q}\cap]-\varepsilon,\varepsilon[)\subset V$. Utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{Q}^c$ dans $\mathbb{R}$ (voir 0.2.5), on sait qu'il existe un irrationnel α dans $]-\varepsilon,\varepsilon[$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, un rationnel r_n dans $]\alpha-1/n,\alpha+1/n[$; comme $\alpha=\lim r_n$, avec $\alpha\notin V$ et $r_n\in V$ à partir d'un certain rang, on en déduit que V n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$; il ne peut donc être compact (voir [1] 3.4.1).

5.3.13 *Convenons ici que l'on écrira "c.a.m." pour "compactifié d'Alexandroff métrique". D'abord, comme (S,d_u) et $(\mathbb{N},d_u)$ sont des métriques localement compacts homéomorphes (voir 2.3.15 et 5.3.7), ils ont les mêmes c.a.m. (voir 5.3.12), s'ils existent. (S',d_u) est un c.a.m. de (S,d_u) puisque (S',d_u) est métrique compact (voir 5.1.9) et $S'-\{0\}=S$. On utilise alors le fait que (S',d_u) est homéomorphe à $(\mathbb{N}',d')$ (voir 2.3.15) pour en déduire que $(\mathbb{N}',d')$ est aussi un c.a.m. de (S,d_u).*

$\mathbb{R}$, $]0,1[$ et P étant homéomorphes (voir 4.3.3 et 4.4.6), ils sont, tout comme $\mathbb{R}$, métriques localement compacts et possèdent les mêmes c.a.m. (s'ils existent). $\mathbb{S}_2^1$ est un c.a.m. de $\mathbb{R}$ puisque c'est un métrique compact vérifiant $\mathbb{S}_2^1-\{W\}\simeq\mathbb{R}$ (voir 4.3.3). Il reste donc à utiliser le fait que les sphères $\mathbb{S}_1^1$, $\mathbb{S}_\infty^1$, et l'ellipse El sont homéomorphes à $\mathbb{S}_2^1$ (voir 4.3.3), pour en déduire que ce sont aussi des c.a.m. de $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^*$, H et H' étant des métriques localement compacts (comme ouverts ou fermés de métriques localement compacts) homéomorphes (voir 4.3.3 et 4.4.6), ils possèdent les mêmes c.a.m. (s'ils existent). $\mathbb{S}_2^1\star\mathbb{S}_2^1$ est un c.a.m. de $\mathbb{R}^*$ car c'est un métrique compact (c'est la réunion des deux cercles C_+ et C_- d'équations respectives $(x-1)^2+y^2=1$ et $(x+1)^2+y^2=1$) qui vérifie $\mathbb{S}_2^1\star\mathbb{S}_2^1-\{O\}\simeq\mathbb{R}^*$, où $O=(0,0)$: en effet, on a $C_+-\{O\}\simeq\mathbb{S}_2^1-\{W\}\simeq\mathbb{R}\simeq]0,+\infty[$ (le premier homéomorphisme étant la translation -1 et le deuxième, la projection stéréographique en dimension 1, de pôle W, sur $\mathbb{R}$ (voir 4.3.3 et 4.3.4)), et $C_--\{O\}\simeq C_+-\{O\}\simeq\mathbb{R}\simeq]-\infty,0[$ (le premier homéomorphisme étant la symétrie $(x,y)\mapsto(-x,y)$) ; on utilise alors 4.3.15 pour en déduire que $\mathbb{S}_2^1\star\mathbb{S}_2^1-\{O\}=(C_--\{O\})\cup(C_+-\{O\})\simeq]-\infty,0[\cup]0,+\infty[=\mathbb{R}^*$ (voir [1] 3.4.3).

Comme les deux boules ouvertes $B_2(O,1)$ et $B_\infty(O,1)$ sont homéomorphes à $\mathbb{R}^2$ (voir 4.3.3), ce sont des métriques localement compacts qui possèdent les mêmes c.a.m. que $\mathbb{R}^2$ (s'ils existent). On remarque que $\mathbb{S}_2^2$ est un métrique compact (comme fermé borné de $\mathbb{R}^3$) ; prouvons alors que $\mathbb{S}_2^2-\{N\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$, où $N=(0,0,1)$. On considère l'application $\Phi_2:\mathbb{S}_2^2-\{N\}\to\mathbb{R}^2$ définie par $\Phi_2(x,y,z)=(x/(1-z),y/(1-z))$; elle est bijective, continue, ainsi que son inverse $\Phi_2^{-1}(x',y')=(2x'/(r^2+1),2y'/(r^2+1),(r^2-1)/(r^2+1))$ où $r=\sqrt{x'^2+y'^2}$, obtenu en résolvant le système $x'=x/(1-z)$ et $y'=y/(1-z)$ (voir [1] 2.1.11).

Chapitre VI

6.1.4 *Si l'application $\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto x^2$ était uniformément continue, il existerait un $\eta>0$ tel que l'on ait $|x^2-y^2|<1$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ vérifiant $|x-y|<\eta$; pour tout x et $y=x+\eta/2$, on aurait donc $|x-y|<\eta$ et $|x^2-y^2|<1$, ce qui est impossible, car $|x^2-y^2|=|(\eta^2/4)+\eta x|\to\infty$ quand $x\to\infty$.*

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application uniformément continue ; il existe donc un $\eta>0$ tel que l'on ait $|f(x)-f(y)|<1$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ vérifiant $|x-y|<\eta$. Fixons un $x\in\mathbb{R}$ et soit n le plus petit entier vérifiant $|x|/\eta<n$ (en fait, n est le successeur de la partie entière de $|x|/\eta$). Pour tout $k=0,1,\ldots,n$, on pose $x_k=kx/n$; on a donc $|x_k-x_{k-1}|=|x|/n<\eta$ pour tout $k=1,\ldots,n$ si bien que $|f(x)-f(0)|\leq\sum_{k=1}^n|f(x_k)-f(x_{k-1})|<n\leq(|x|/\eta)+1$; il reste à poser $a=1/\eta$ et $b=|f(0)|+1$ pour obtenir l'inégalité proposée. Si f est aussi une fonction polynômiale, elle vérifie $|f(x)|/x^2\leq a/|x|+b/x^2$ pour tout x non nul, et donc $\lim_{x\to\infty}|f(x)|/x^2=0$, ce qui est impossible lorsque f est de degré ≥2 (bien sûr, tout polynôme de degré ≤1 est uniformément continu car lipschitzien).

Si l'application $\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}:x\mapsto1/x$ était uniformément continue, il existerait un $\eta>0$ tel que l'on ait $|1/x-1/y|<1$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}^*$ vérifiant $|x-y|<\eta$; pour tout x et $y=x+\eta/2$, on aurait donc $|x-y|<\eta$ et $|1/x-1/y|<1$, ce qui est impossible, car $|1/x-1/y|=(\eta/2)/|x(x+\eta/2)|\to\infty$ quand

$x\to 0$. *Par contre, l'application* $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}: x\mapsto\sqrt{x}$ *est uniformément continue (utiliser l'inégalité* $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\leq\sqrt{|x-y|}$*), mais pas lipschitzienne puisque sa dérivée n'est pas bornée (voir* 1.6.12*).*

Soit $B: E\times F\to G$ *une application bilinéaire continue non identiquement nulle,* $(a,b)\in E\times F$ *vérifiant* $\|B(a,b)\|=1$ *(c'est possible, on considérant* $(a,b)=(a',b')/\sqrt{\|B(a',b')\|}$*, où* $B(a',b')\neq 0$*) et* $u:\mathbb{R}\to E\times F$ *définie par* $u(t)=t(a,b)$*. Si* B *était uniformément continue, le composé* $\varphi=\|\ \|\circ B\circ u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *le serait aussi (puisque* u *et* $\|\ \|$ *sont lipschitziennes), ce qui est impossible, puisque* $\varphi(t)=t^2$ *n'est pas uniformément continue.*

6.1.6 *Une fonction continue sur* $[0,+\infty[$ *possédant une limite finie en* $+\infty$ *se prolonge de façon continue à* $[0,+\infty]$*, muni de* $\bar{d}$ *(voir* 4.1.7*). Comme* $(\overline{\mathbb{R}},\bar{d})$ *est compact (voir* 5.1.15*), il en est de même de son fermé* $[0,+\infty]$ *; il reste alors à appliquer le théorème de Heine (voir* 6.1.5*).*

6.1.11 *On a vu dans* 0.3.5 *que l'ensemble des fonctions polynomiales sur* $[0,1]$ *est une sous-algèbre de* $C([0,1],\mathbb{R})$ *; pour les deux autres conditions, il suffit de considérer respectivement les fonctions polynomiales* $f(x)=x$ *et* $g(x)=1$*.*

6.2.4 *Comme* $\delta_1\overset{Met}{\sim}\delta_2$ *(voir* 1.5.4*), il suffit de prouver que* $\delta_1\overset{Unif}{\sim}d$*. L'inégalité* $\delta_1\leq d$ *signifie que l'application* $id:(E,d)\longrightarrow(E,\delta_1)$ *est* 1*-lipschitzienne (voir* 1.6.16*) donc uniformément continue. Il reste donc à prouver que l'application* $id:(E,\delta_1)\longrightarrow(E,d)$ *l'est aussi. Soit* $\varepsilon>0$ *et posons* $\eta=\inf(1,\varepsilon)$ *; on a* $\eta>0$ *et, pour tout* $x,y\in E$ *vérifiant* $\delta_1(x,y)<\eta$*, on a* $\delta_1(x,y)<\inf(1,\varepsilon)\leq 1$ *et donc* $d(x,y)=\delta_1(x,y)<\eta\leq\varepsilon$*.*

6.3.5 *La suite* $(1/n)$ *est* d_u*-convergente dans* $\mathbb{R}$ *donc* d_u*-de Cauchy dans* $\mathbb{R}$*, donc aussi dans* $]0,+\infty[$*; par contre, par unicité de la limite dans* $\mathbb{R}$*, elle ne* d_u*-converge pas dans* $]0,+\infty[$*.*

6.3.6 *Pour la suite de rationnels considérée, on raisonne comme dans* 6.3.5*, puisque* $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$*.*

La suite (n) *n'est pas* d_u*-de Cauchy dans* $\mathbb{R}$ *: on considère* $\varepsilon=1$*, car* $|n-m|\geq 1$ *pour tout* $n\neq m$ *; par contre,* $d(n,m)=|\operatorname{Arctg} n-\operatorname{Arctg} m|\to 0$ *quand* $n,m\to+\infty$*, puisque la suite* $(\operatorname{Arctg} n)$ d_u*-converge vers* $\pi/2$ *; enfin, la suite* (n) *ne* d*-converge pas puisqu'elle ne* d_u*-converge pas, sachant que les distances* d *et* d_u *sont topologiquement équivalentes (voir* 2.2.9*).*

Si (y_n) *est une suite* d_0*-de Cauchy, elle vérifie* $d_0(y_n,y_m)=0$ *ou* 1 *pour tout* $n,m\in\mathbb{N}$ *; il suffit donc de considérer, ici encore,* $\varepsilon=1$*.*

La suite (f_n) *(où* $f_n(x)=n$ *ou* $x^{-1/2}$*, selon que* $0\leq x\leq 1/n^2$ *ou* $1/n^2\leq x\leq 1$*) est une* d_1*-suite de Cauchy : pour* $n<m$*, on a* $\|f_m-f_n\|_1=\int_0^{1/n^2}|f_m(x)-f_n(x)|dx\leq\int_0^{1/n^2}x^{-1/2}dx=2/n\to 0$*. Cette suite ne peut* d_1*-converger vers une fonction* $f\in C([0,1],\mathbb{R})$ *: un tel* f *étant continu sur le compact* $[0,1]$*, il existe un entier* $n_0>0$ *tel que l'on ait* $|f(x)|\leq n_0/2$ *pour tout* $x\in[0,1]$ *(voir* 5.1.20*). Par suite, pour tout* $n\geq n_0$ *et tout* $x\in[0,1/n_0^2]$*, on a* $|f_n(x)-f(x)|\geq n_0-n_0/2=n_0/2$*, et par suite* $\|f_n-f\|_1\geq\int_0^{1/n_0^2}n_0/2dx=1/2n_0>0$ *; donc,* $\|f_n-f\|_1\not\to 0$*. De la même façon, la suite* (g_n) *(où* $g_n(x)=n$ *ou* $x^{-1/3}$*, selon que* $0\leq x\leq 1/n^3$ *ou* $1/n^3\leq x\leq 1$*) est une* d_2*-suite de Cauchy (elle vérifie, pour* $n<m$*,* $\|g_m-g_n\|_2^2=\int_0^{1/n^3}|g_m(x)-g_n(x)|^2dx\leq\int_0^{1/n^3}x^{-2/3}dx=3/n$*) ; elle ne peut non plus converger vers une fonction* $g\in C([0,1],\mathbb{R})$ *car il existerait alors un entier* $n_0>0$ *tel que l'on ait* $|g(x)|\leq n_0/2$ *pour tout* $x\in[0,1]$ *et donc tel que, pour tout* $n\geq n_0$*, on ait* $\|g_n-g\|_2^2\geq\int_0^{1/n_0^3}(n_0/2)^2dx=1/4n_0>0$*.*

Rappelons que, dans $\mathbb{R}[X]$*, on a les inégalités* $\|\ \|_\infty\leq\|\ \|_2\leq\|\ \|_1$ *(voir* 1.5.8*). Pour prouver que* (P_n) *n'est de Cauchy pour aucune de ces normes, il suffit donc de le prouver pour* $\|\ \|_\infty$ *; or, pour* $n<m$*, on a* $\|P_m-P_n\|_\infty=\|X^{n+1}+\cdots+X^m\|_\infty=1\not\to 0$*. Pour prouver que* (Q_n) *n'est pas de Cauchy pour* $\|\ \|_1$*, il suffit de considérer* $\varepsilon=1/2$*, puisque* $\|Q_m-Q_n\|_1=\|X^{n+1}/(n+1)+\cdots+X^m/m\|_1$ $=1/(n+1)+1/(n+2)+\cdots+1/m>(m-n)/m=1/2$ *pour* $m=2n$ *; par contre, elle est de Cauchy pour les deux autres normes puisque* $\|Q_m-Q_n\|_2=\sqrt{1/(n+1)^2+\cdots+1/m^2}\to 0$ *(car la série* $\sum 1/n^2$ *converge, i.e. la suite de terme général* $s_n=\sum_{k=1}^n 1/k^2$ d_u*-converge, et donc est une* d_u*-suite de Cauchy). Enfin, remarquant que* $\|R_m-R_n\|_1=\|Q_m-Q_n\|_2^2$*, on en déduit que* (R_n) *est*

une suite de Cauchy pour $\|\,\|_1$, *et donc aussi pour les deux autres normes. Soit alors* $P(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_NX^N$ *un polynôme; prouvons par exemple que* (Q_n) *ne peut converger vers* P *pour la norme* $\|\,\|_\infty$ *(ni donc pour* $\|\,\|_2$*) : en effet,* $\|P-Q_n\|_\infty\not\to 0$ *puisque, pour tout* $n>N$, *on a* $\|P-Q_n\|_\infty=\sup(|a_0-1|,\ldots,|a_N-1/N|,1/(N+1),1/(N+2),\ldots,1/n)\geq 1/(N+1)$.

6.3.10 *L'application* $f:(]0,+\infty[,d_u)\to(]0,+\infty[,d_u):x\mapsto 1/x$ *est continue ; la suite* $(1/n)$ *est* d_u*-de Cauchy dans* $]0,+\infty[$*, contrairement à la suite* $(f(1/n))$.

6.3.11 *Soit* $f:(E,d)\to(E',d')$ *une application Cauchy-continue ; montrons qu'elle est continue. Soit* (x_n) *une suite* d*-convergente vers* x *dans* E *; considérons la suite* (y_n) *définie par* $y_{2n}=x_n$ *et* $y_{2n+1}=x$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$. *La suite* (y_n) d*-convergeant vers* x *dans* E*, la suite* $(f(y_n))$ d'*-converge vers* $f(x)$ *(car c'est une* d'*-suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente vers* $f(x)$ *: la suite stationnaire* $(f(y_{2n+1}))$*). La sous-suite* $(f(y_{2n}))=(f(x_n))$ d'*-converge donc aussi vers* $f(x)$.

6.4.2 *Soit* (E,d) *un espace métrique ; s'il est complet, alors* $F=E$ *vérifie la propriété* (P) *! Inversement, s'il existe une partie* F *dense dans* E *vérifiant* (P)*, montrons que* (E,d) *est complet. Soit donc* (x_n) *une* d*-suite de Cauchy dans* E *;* F *étant dense dans* E*, il existe une suite* (y_n) *dans* F *telle que, pour tout* $n\in\mathbb{N}$*, on ait* $d(x_n,y_n)<1/n$ *et donc telle que* $d(x_n,y_n)\to 0$. *On voit facilement que* (y_n) *est une* d*-suite de Cauchy dans* F *; elle* d*-converge donc dans* E *par hypothèse. Il reste donc à vérifier que* (x_n) d*-converge vers la même limite.*

6.4.13 $\mathbb{R}$ *est complet pour les distances* δ_i *car ces distances* δ_i *sont uniformément équivalentes à* d_u *(voir* 6.2.4*) ; et* $(\mathbb{R},d_u)$ *est complet (voir* 6.4.11*).*

$\mathbb{R}$ *n'est pas complet pour la distance* d *puisque la suite* (n) *est* d*-de Cauchy et pourtant non* d*-convergente (voir* 6.3.6*). On peut aussi utiliser le fait que, par définition de* d*, l'application* $\mathrm{Arctg}:(\mathbb{R},d)\to(]-\pi/2,\pi/2[,d_u)$ *est une isométrie bijective (voir* 2.3.15*) donc un homéomorphisme uniforme ; le fait que* $(\mathbb{R},d)$ *n'est pas complet résulte alors, d'après* 6.4.7*, du fait que* $(]-\pi/2,\pi/2[,d_u)$ *ne l'est pas (car* $]-\pi/2,\pi/2[$ *n'est pas fermé dans* $(\mathbb{R},d_u)$ *; voir* 6.4.15*).*

$\mathbb{R}$ *étant complet pour* d_u*, on a* $d\overset{Unif}{\not\sim}d_u$ *dans* $\mathbb{R}$ *(voir* 6.4.8*). Par contre,* $d\overset{Unif}{\sim}d_u$ *et même* $d\overset{Met}{\sim}d_u$ *sur* $[1,2]$*, car, d'une part,* $[1,2]$ *est compact pour* d *puisqu'il l'est pour* d_u *et* $d\overset{Top}{\sim}d_u$ *(on applique donc le théorème de Heine* 6.1.5 *à l'homéomorphisme* $id:([1,2],d)\to([1,2],d_u)$*) ; et, d'autre part, on applique la formule des accroissements finis à la fonction* Arctg *sur* $[x,y]\subset[1,2]$ *: on obtient* $\mathrm{Arctg}\,x-\mathrm{Arctg}\,y=(x-y)/(1+c^2)$*, où* $x<c<y$*, et donc* $(1/5)|x-y|<|\mathrm{Arctg}\,x-\mathrm{Arctg}\,y|<(1/2)|x-y|$.

Vu 6.3.11*, on doit vérifier que, si* (E,d) *est complet et si* $f:(E,d)\to(F,\delta)$ *est continue, elle est aussi Cauchy-continue ; c'est immédiat puisque, pour une suite dans un espace complet, "Cauchy=convergente". Pour l'application continue* $x\mapsto x^2$*, on utilise donc le fait que* $(\mathbb{R},d_u)$ *est complet.*

Soit (x_n) *et* (y_n) *deux suites de Cauchy dans un espace métrique* (E,d) *;* (x_n,y_n) *est donc une suite de Cauchy dans* $(E\times E,d_p)$*, où* d_p *est une distance produit (voir* 6.3.16*). Il reste alors à utiliser le fait que la distance* $d:(E\times E,d_p)\to(\mathbb{R},d_u)$ *est lipschitzienne (voir* 1.6.7*) pour en déduire (voir* 6.4.9*) que la suite* $(d(x_n,y_n))$ *est une suite de Cauchy dans* $(\mathbb{R},d_u)$ *complet, donc* d_u*-convergente. Si maintenant les suites de Cauchy* (x_n) *et* (y_n) *sont* d*-équivalentes, et si* $f:(E,d)\to(E',d')$ *est Cauchy-continue, alors les suites* $(f(x_n))$ *et* $(f(y_n))$ *sont* d'*-Cauchy et* d'*-équivalentes, puisque ce sont des sous-suites de la suite de Cauchy* $(f(z_n))$ *définie par* $z_{2n}=x_n$ *et* $z_{2n+1}=y_n$.

Soit $(H,\langle,\rangle)$ *un espace préhilbertien, et* (x_n)*,* (y_n) *deux suites de Cauchy dans* H*. On a alors* $|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x_m,y_m\rangle|\leq|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x_n,y_m\rangle|+|\langle x_n,y_m\rangle-\langle x_m,y_m\rangle|=|\langle x_n,y_n-y_m\rangle|+|\langle x_n-x_m,y_m\rangle|\leq\|x_n\|\,\|y_n-y_m\|+\|x_n-x_m\|\,\|y_m\|$ *; on conclut grâce au fait que les suites* (x_n) *et* (y_n) *sont de Cauchy, et donc que les suites* $(\|x_n\|)$ *et* $(\|y_n\|)$ *convergent dans* $(\mathbb{R},d_u)$ *complet (car toute norme est Cauchy-continue puisque lipschitzienne ; voir* 1.6.8*,* 6.1.2 *et* 6.3.9*).*

$(\mathbb{R},d_u)$ *est localement compact non compact (voir* 5.3.7*) et complet. Par contre,* $(]0,+\infty[,d_u)$ *est non complet (voir* 6.4.2*, ou bien utiliser* 6.4.15*), donc non compact, d'après* 6.4.5 *; et pourtant, il est localement compact, puisque* $]0,+\infty[$ *est un ouvert de* $(\mathbb{R},d_u)$ *qui l'est (voir* 5.3.3*).*

6.4.17 *Pour la distance usuelle, les espaces* $[1/n,+\infty[$ *sont tous complets (car fermés dans* $\mathbb{R}$ *qui l'est) non compacts (car non bornés), et pourtant leur réunion* $]0,+\infty[$ *n'est pas complète puisque non fermée dans* $\mathbb{R}$.

6.4.21 *Supposons que* K *soit un compact d'intérieur non vide d'un e.v.n.* E *de dimension infinie, et soit* $x\in\overset{\circ}{K}$. *Comme* $\overset{\circ}{K}$ *est un voisinage de* x*, il existe un* $r>0$ *tel que* $B(x,r)\subset\overset{\circ}{K}\subset K$*, et donc (voir* 3.1.13*) tel que* $B'(x,r)=\overline{B(x,r)}\subset\overline{K}=K$ *(tout compact étant fermé dans un espace métrique). Ainsi la boule fermée* $B'(x,r)$ *serait compacte (car fermée dans le compact* K*), et donc aussi la boule fermée* $B'(0,1)$ *qui lui est homéomorphe (voir* 4.3.3*), ce qui est contraire au fait que* E *est supposé de dimension infinie (voir le théorème de Riesz* 6.4.19*).*

6.4.23 *Soit* $f:[a,b]\to[a,b]$ *une application continue (pour la distance usuelle) ; montrons qu'elle possède un point fixe dans* $[a,b]$*. Si* a *ou* b *est un tel point fixe, c'est terminé ; sinon, posons* $g(x)=f(x)-x$ *pour tout* $x\in[a,b]$*. Remarquant que* g *est continue et vérifie* $g(a)>0$ *et* $g(b)<0$*, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires pour en déduire qu'il existe un* $c\in]a,b[$ *tel que* $g(c)=0$*, i.e. tel que* $f(c)=c$*. Ce point fixe n'est pas forcément unique : considérer l'identité* $[0,1]\to[0,1]$ *(qui n'est évidemment pas contractante, pas plus qu'elle ne vérifie la condition plus faible* $(C_<)$*).*

6.4.25 $x/2=x$ *ssi* $x=0$*, or* $0\notin]0,1]$ *; c'est pourquoi l'application* $x\mapsto x/2$ *n'a pas de point fixe dans* $]0,1]$ *(ici,* $]0,1]$ *n'est pas complet). L'application* $f(x)=1/x$ *vérifie* $f([1/2,2])\subset[1/2,2]$*,* $f(1)=1$ *et* $|f(1/2)-f(2)|=|1/2-2|$*. L'application* $g(x)=x+1/x$ *vérifie* $g([1,+\infty[)\subset[1,+\infty[$ *; elle n'a pas de point fixe car l'équation* $g(x)=x$ *est sans solution. De plus,* $|g(x)-g(y)|=|x-y|\,|1-1/(xy)|<|x-y|$ *pour tout* $x,y\geq1$ *vérifiant* $x\neq y$*. Par contre,* $g:[1,+\infty[\to[1,+\infty[$ *ne peut être contractante, puisque* $[1,+\infty[$ *est complet ! L'application* $h(x)=x/2+1/x$ *vérifie* $h([1,2])\subset[1,2]$*, ainsi que* $|h'(x)|\leq1/2$ *pour tout* $x\in]1,2[$ *; par suite, d'après* 1.6.12*,* $h:[1,2]\to[1,2]$ *est contractante, elle admet donc un unique point fixe dans le complet* $[1,2]$ *: en fait, ce point fixe est* $\sqrt{2}$ *(l'unique solution de l'équation* $x=x/2+1/x$ *dans* $[1,2]$*). On construit par approximations successives une suite de rationnels qui converge vers* $\sqrt{2}$*, en posant par exemple* $x_0=2$*, puis, pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$*,* $x_n=h(x_{n-1})$ *: les premiers termes de cette suite sont donc* $2\,;3/2\,;3/4+2/3=1{,}4166666\ldots\,;1{,}4142156\ldots$ *(figure* 14*). Enfin,* 0 *est l'unique point fixe de l'application* $u(x)=-x$ *; si l'on fixe* $x_0\in[-1,1]-\{0\}$*, la suite* (x_n) *définie, pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$*, par* $x_n=u(x_{n-1})$ *ne peut converger vers* 0*, puisque c'est la suite alternée* $((-1)^n x_0)$*. Le théorème du point fixe ne s'applique pas ici car* u *n'est pas contractante.*

On a vu dans 1.6.12 *que la projection orthogonale* p_F *sur un sous-espace vectoriel* F *de dimension finie d'un espace préhilbertien* H *est* 1*-lipschitzienne ; si* H *est complet et* F *non réduit à* $\{0\}$*, cette projection n'est pas contractante, puisqu'elle possède une infinité de points fixes : tous ceux de* F*.*

Les applications $g_1(x)=(\sin x)/2$ *et* $g_2(x)=(\mathrm{Arctg}\,x)/3$ *sont respectivement* $1/2$ *et* $1/3$*-lipschitziennes (car leurs dérivées sont bornées respectivement par* $1/2$ *et* $1/3$ *... voir* 1.6.12*). Par suite, si l'on pose* $g(x,y)=(g_1(y),g_2(x))$*, on a, pour tout* $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$*,* $\|g(x,y)-g(x',y')\|_\infty=\|((\sin y-\sin y')/2,\ (\mathrm{Arctg}\,x-\mathrm{Arctg}\,x')/3)\|_\infty\leq(1/2)\|(x,y)-(x',y')\|_\infty$*. Comme* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}^2$ *sont des espaces de Banach, il en résulte immédiatement que* $f_1(x)=x+g_1(x)$ *et* $f_2(x,y)=(x,y)+g(x,y)$ *sont bijectives (voir* 6.4.24*).*

6.4.30 *Posons* $\tilde f=T(f)$ *; pour tout* $x\in[0,1]$*, on a* $|\tilde f(x)-\tilde g(x)|\leq\int_0^x|t(f(t)-g(t))|dt\leq\|f-g\|_\infty\times\int_0^x t\,dt\leq(1/2)\|f-g\|_\infty$ *; par suite,* $\|T(f)-T(g)\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|\tilde f(x)-\tilde g(x)|\leq(1/2)\|f-g\|_\infty$*. L'application* T *est donc bien contractante. Le théorème du point fixe affirme l'existence d'un unique élément* $g\in C([0,1],\mathbb{R})$ *vérifiant* $T(g)=g$*. S'inspirant de* 6.4.22*, "approchons" ce point fixe par*

approximations successives : partons de $f_0=0$ *et posons, pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n=T(f_{n-1})=\tilde{f}_{n-1}$; *cette suite* (f_n) *converge uniformément vers* g. *Montrons alors par récurrence que, pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n} x^{2k}/(k!\,2^k)$ *: c'est vrai pour* $n=1$; *admettons-le pour* n, *on a alors* $f_{n+1}(x)=\tilde{f}_n(x)=\int_0^x t(1+\sum_{k=1}^{n} t^{2k}/(k!\,2^k))dt=\sum_{k=0}^{n}\int_0^x t^{2k+1}/(k!\,2^k)dt=\sum_{k=0}^{n} x^{2(k+1)}/((k+1)!\,2^{k+1})=\sum_{k=1}^{n+1} x^{2k}/k!\,2^k$. *La convergence uniforme impliquant la convergence simple, il reste à écrire, pour tout* $x\in[0,1]$, $g(x)=\lim f_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k}/(k!\,2^k)=-1+\sum_{k=0}^{\infty}(1/k!)(x^2/2)^k=e^{x^2/2}-1$.

Soit (x_n) *une* δ*-suite de Cauchy dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *(son terme général est donc la suite* $x_n=(x_{nk})=(x_{n0},x_{n1},\ldots,x_{nk},\ldots)$*) ; montrons qu'elle* δ*-converge dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *On a vu dans* 1.6.12 *que toutes les projections* $\pi_k:(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\delta)\to(\mathbb{R},d)$ *sont lipschitziennes, donc Cauchy-continues ; par suite, toutes les suites projections* $(x_{nk})_n$ *(ici, la* $k^{\text{ème}}$*) sont des suites de Cauchy dans* $(\mathbb{R},d)$ *qui est complet, puisque* d *est uniformément équivalente à* d_u *(voir* 6.2.4*). Par suite, la suite* $(x_{nk})_n$ d*-converge dans* $\mathbb{R}$; *posons* $a_k=\lim_n x_{nk}$; *on a donc* $d(x_{nk},a_k)\to 0$ *quand* $n\to+\infty$. *Posons* $a=(a_k)$; *montrons que* $x_n\to a$ *dans* $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\delta)$. *Soit donc* $\epsilon>0$; *par hypothèse, il existe un* $N\in\mathbb{N}$ *tel que, pour tout* $n,m\geq N$, *on a* $\delta(x_n,x_m)\leq\epsilon$, *et donc aussi* $\sum_{k=0}^{K} d(x_{nk},x_{mk})/2^k\leq\epsilon$ *pour tout* $K\in\mathbb{N}$; *il suffit alors de faire tendre d'abord* $m\to+\infty$, *pour obtenir* $\sum_{k=0}^{K} d(x_{nk},a_k)/2^k\leq\epsilon$ *(en utilisant la continuité de l'addition et de la distance* d*), puis* $K\to+\infty$, *pour obtenir finalement l'inégalité* $\delta(x_n,a)\leq\epsilon$, *vraie pour tout* $n\geq N$.

6.5.2 *S'il existe un* $k>0$ *tel que l'on ait* $d'(f(a),f(b))\leq kd(a,b)$ *pour tout* $a,b\in F$, *on a, en particulier, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $d'(f(x_n),f(y_n))\leq kd(x_n,y_n)$ *pour des suites* (x_n) *et* (y_n) *dans* F ; *et donc, en utilisant la continuité des distances,* $d'(g(x),g(y))\leq kd(x,y)$ *si* $x,y\in E$ *vérifient* $x=\lim_n x_n$ *et* $y=\lim_n y_n$ *(où* g *est l'unique prolongement de* f *à* E *défini dans* 6.5.1*). Dans le cas où* f *est une isométrie, remplacer dans ce qui précède les symboles "*$\leq k$*" par le symbole "*$=$*".*

Pour la distance usuelle, l'application continue (mais non uniformément continue d'après 6.1.4*)* $h:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}:x\mapsto 1/x$ *ne peut se prolonger en une application continue sur* $\mathbb{R}=\overline{\mathbb{R}^*}$ *(voir* 4.1.8*) ; et pourtant,* $\mathbb{R}$ *est complet.*

6.5.3 *Soit* $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ *une application uniformément continue ; d'après* 6.5.1, *elle se prolonge en une application uniformément continue* g *à* $[a,b]=\overline{]a,b[}$, *qui est bornée, d'après* 5.1.20 ; *sa restriction* f *à* $]a,b[$ *est donc, a fortiori, bornée.*

6.5.7 *D'abord,* $([-\pi/2,\pi/2],d_u)$, $(\overline{\mathbb{R}},\bar{d})$, $(\mathbb{N}',d')$ *et* (S',d_u) *sont des espaces complets car ils sont compacts (voir* 2.3.15 *et* 5.1.15*). Par un argument de densité, on sait que* $([-\pi/2,\pi/2],d_u)$ *et* $(\overline{\mathbb{R}},\bar{d})$ *sont respectivement des complétés métriques de* $(]-\pi/2,\pi/2[,d_u)$ *et* $(\mathbb{R},d)$; *on conclut grâce aux isométries bijectives* $(]-\pi/2,\pi/2[,d_u)\simeq(\mathbb{R},d)$ *et* $([-\pi/2,\pi/2],d_u)\simeq(\overline{\mathbb{R}},\bar{d})$ *(voir* 3.2.17 *et* 2.3.15*). On traite de la même façon les autres exemples à l'aide de* 2.3.15 *et* 3.2.15.

On a déjà vu dans 6.4.30 *que l'espace* $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\delta)$ *est complet ; il suffit donc de prouver que* $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ *est dense dans* $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\delta)$. *Soit* $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; *posons, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $x_n=(a_0,a_1,\ldots,a_n,0,0,0,\ldots)$, *la suite vérifiant* $x_{nk}=a_k$ *ou* 0, *selon que* $k\leq n$ *ou non. Par définition, on a* $x_n\in\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$; *prouvons alors que la suite* (x_n) δ*-converge vers* a *dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *En effet,* $\delta(x_n,a)=\sum_{k=0}^{\infty} d(x_{nk},a_k)/2^k=\sum_{k=n+1}^{\infty} d(0,a_k)/2^k\leq\sum_{k=n+1}^{\infty} 1/2^k\to 0$ *quand* $n\to+\infty$ *(car la dernière série obtenue est le reste d'ordre* n *de la série numérique convergente* $\sum_{k=0}^{\infty} 1/2^k$*).*

Chapitre VII

7.1.2 *Posons* $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *et* $E_1=\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$; E_1 *est un sous-espace de* E *qui est complet pour la norme* $\|f\|=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$ *: soit* (f_n) *une suite de cauchy dans* $(E_1,\|\ \|)$; *les suites* (f_n) *et* (f'_n) *sont donc de Cauchy pour* $\|\ \|_\infty$, *de sorte qu'elles convergent dans* $(E,\|\ \|_\infty)$ *complet. Posons* $f=\lim f_n$; *par un théorème du D.E.U.G, on sait que* f *est de classe* C^1 *et que* $f'=\lim f'_n$. *Le fait que* (f_n) *converge vers* f *dans* $(E_1,\|\ \|)$ *résulte immédiatement de* $\|f_n-f\|=\|f_n-f\|_\infty+\|f'_n-f'\|_\infty$.

E_1 n'est pas complet pour la norme $\|\ \|_\infty$ puisqu'il n'est pas fermé dans $(E,\|\ \|_\infty)$ (voir 6.4.15*) : en effet, E_1 est dense dans E, car l'espace F des fonctions polynômes sur $[0,1]$, qui est inclus dans E_1, l'est (pour la norme de la convergence uniforme ; voir le théorème de Stone-Weierstrass-Bernstein* 6.1.8 *et* 6.1.9*).*

Fixons $p\in[1,\infty[$ et prouvons que $(l^p,\|\ \|_p)$ est complet. Pour cela, on procède comme pour l'espace $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\delta)$ de 6.4.30*. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $(l^p,\|\ \|_p)$; toutes les suites projections $(x_{nk})_n$ (ici, la $k^{ème}$) sont donc des suites convergentes dans $(\mathbb{R},d_u)$ (car les projections π_k sont lipschitziennes : voir* 1.6.12*) ; posons $a_k=\lim_n x_{nk}$ et $a=(a_k)$, et montrons que $x_n\to a$ dans $(l^p,\|\ \|_p)$. Soit donc $\varepsilon>0$; par hypothèse, il existe un $N\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n,m\geq N$, on ait $\|x_n-x_m\|_p^p\leq\varepsilon$, et donc aussi $\sum_{k=0}^{K}|x_{nk}-x_{mk}|^p\leq\varepsilon$ pour tout $K\in\mathbb{N}$; il suffit alors de faire successivement $m\to+\infty$ et $K\to+\infty$ pour obtenir $\|x_n-a\|_p^p\leq\varepsilon$, vraie pour tout $n\geq N$. Ainsi, on a $a\in l^p$ (on choisit un $n\geq N$ et l'on écrit $\|a\|_p\leq\|a-x_n\|_p+\|x_n\|_p$) et $\|x_n-a\|_p\to 0$.*

L'espace $(l^\infty,\|\ \|_\infty)$ est un espace de Banach puisque $l^\infty=\mathcal{F}_b(\mathbb{N},\mathbb{R})$ ... voir 6.4.28*. L'espace $(l_0,\|\ \|_\infty)$ en est aussi un car l_0 est fermé dans $(l^\infty,\|\ \|_\infty)$: soit (x_n) une suite de l_0 qui converge vers a dans $(l^\infty,\|\ \|_\infty)$; il faut montrer que $a\in l_0$. Soit $\varepsilon>0$; alors, par hypothèse, pour tout n, il existe un K_n tel que l'on ait $|x_{nk}|\leq\varepsilon$ pour tout $k\geq K_n$ (car $x_n\in l_0$) ; et il existe un N tel que l'on ait $\|x_n-a\|_\infty\leq\varepsilon$ pour tout $n\geq N$ (car $\|x_n-a\|_\infty\to 0$). Fixons un $n_0\geq N$; alors, pour tout $k\geq K_{n_0}$, on a $|a_k|\leq|a_k-x_{n_0k}|+|x_{n_0k}|\leq\|a-x_{n_0}\|_\infty+|x_{n_0k}|\leq 2\varepsilon$; par suite $a_k\to 0$.*

7.1.4 *Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}_c(E,F)$ muni de sa norme d'opérateur ; alors $(j(u_n))$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{F}_b(B'(0,1),F),\|\ \|_\infty)$ (car j est une isométrie), elle converge donc vers un u dans cet espace. On prolonge u à E en posant $u(x)=0$ ou $\|x\|u(x/\|x\|)$ selon que $x=0$ ou non. Il reste alors à vérifier que ce prolongement est linéaire continu (car borné sur $B'(0,1)$; voir* 2.4.1*) et vérifie $\|u_n-u\|\to 0$ (ce qui est immédiat puisque j est une isométrie).*

7.2.5 *On a déjà vu dans* 7.1.2 *que les $(l^p,\|\ \|_p)$ sont des espaces de Banach pour tout $p\in[1,\infty]$; ainsi que $(l_0,\|\ \|_\infty)$. Il reste donc à montrer que l'adhérence de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ dans $(l^p,\|\ \|_p)$ est l^p ou l_0 selon que $p\in[1,\infty[$ ou $p=\infty$. On s'inspire de la preuve du fait que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est dense dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\delta)$ (voir* 6.5.7*) : soit $a\in l^p$ avec $p\in[1,\infty[$ (resp. $a\in l_0$ avec $p=\infty$) ; posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n=(a_0,a_1,\ldots,a_n,0,0,0,\ldots)$, la suite vérifiant $x_{nk}=a_k$ ou 0, selon que $k\leq n$ ou non. Alors $\|x_n-a\|_p^p=\sum_{k=0}^{\infty}|x_{nk}-a_k|^p=\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|^p\to 0$ quand $n\to+\infty$ puisque $a\in l^p$ (resp. $\|x_n-a\|_\infty=\sup_k|x_{nk}-a_k|=\sup_{k\geq n+1}|a_k|\to 0$ quand $n\to+\infty$ puisque, pour $\varepsilon>0$, il existe un $N\in\mathbb{N}$ tel que, on ait $|a_k|<\varepsilon$ pour tout $k\geq N$, car $a\in l_0$ ici, et donc $\sup_{k\geq n+1}|a_k|\leq\sup_{k\geq N}|a_k|\leq\varepsilon$ pour tout $n\geq N$).*

7.3.2 *La série $\sum P_n$ proposée converge normalement car, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\|P_n\|_\infty=P_n(1)=1/n!$. Cependant, il n'existe aucune fonction polynomiale P vérifiant $P=\sum_{n=0}^{\infty}P_n$, i.e. $\|\sum_{k=0}^{n}P_k-P\|_\infty\to 0$: supposons qu'un tel P existe et considérons les restrictions à $[0,1]$ de toutes ces fonctions polynomiales ; on se place ainsi dans l'espace de Banach $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\|\ \|_\infty)$, dans lequel, par hypothèse, la série $\sum P_n$ converge uniformément, et donc simplement, vers P sur $[0,1]$; on a donc $P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n/n!=e^x$ pour tout $x\in[0,1]$, ce qui est absurde puisque la fonction $x\mapsto e^x$ n'est pas polynomiale (car elle est égale à sa dérivée).*

7.3.7 *La série $\sum_{\mathbb{Z}^*}x_n$, où $x_n=1/|n|$ pour tout $n\in\mathbb{Z}^*$, vérifie $x_n\to 0$ quand $|n|\to+\infty$; et pourtant elle diverge puisque la suite des sommes partielles $\tilde{s}_n$ diverge.*

7.3.9 *La série $\sum_{\mathbb{Z}^*}x_n$, où $x_n=1/n$ pour tout $n\in\mathbb{Z}^*$, converge et a pour somme 0 puisque $\tilde{s}_{2n}=0$ pour tout $n>0$, et $\tilde{s}_{2n+1}\to 0$; alors que les séries $\sum_{n>0}x_n=\sum 1/n$ et $\sum_{n<0}x_n=\sum(-1/n)$ divergent.*

7.4.3 *Soit A une algèbre normée quelconque ; en faisant successivement $a=b=1$ et $b=a^{-1}$ dans $\|ab\| \leq \|a\|\ \|b\|$, on obtient $1\leq\|1\|$ et $\|a\|^{-1}\leq\|a^{-1}\|$.*

On considère $M_n(\mathbb{R})$ avec $n\geq 2$; c'est une algèbre de Banach pour la norme $\|A\|=n\sup_{ij}|a_{ij}|$ (voir 1.3.6) ; elle vérifie $\|I\|=n\neq 1$. On considère enfin la matrice $S=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3\end{pmatrix}$; elle vérifie $S^2=I$ (c'est donc une symétrie), et donc $S^{-1}=S$; pour que $\|S\|^{-1}\neq\|S^{-1}\|$, il suffit donc de choisir une norme d'opérateur sur $M_2(\mathbb{R})$ telle que $\|S\|\neq 1$: la norme $\|A\|=\sup_i\sum_j|a_{ij}|$ convient (voir 1.3.6).

7.6.1 *Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$; l'application $\varphi:\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\to M_n(\mathbb{R}):u\mapsto mat_{\mathcal{B}}(u)$ étant un isomorphisme d'algèbres de Banach, on a $\varphi(e^u)=e^{\varphi(u)}$ d'après 7.5.6.*

7.6.5 *On considère l'application $\varphi:\mathbb{C}\to M_2(\mathbb{R}):x+iy\mapsto\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x\end{pmatrix}$. C'est un homomorphisme d'algèbres de Banach (il est continu car linéaire en dimension finie) ; on a donc $e^{\varphi(a+ib)}=\varphi(e^{a-ib})=\varphi(e^a\cos b+ie^a\sin b)$ d'après 7.5.6.*

Il s'agit de résoudre le système différentiel $x_1'=-x_1+x_2+x_3$, $x_2'=x_1-x_2+x_3$, $x_3'=x_1+x_2-x_3$. La matrice A de ce système est diagonalisable dans une base propre $V_1=(1,1,1)$ (vecteur propre de la valeur propre simple 1), $V_2=(1,-1,0)$ et $V_3=(1,0,-1)$ (vecteurs propres de la valeur propre double -2) ; sa diagonalisée D a $1,-2,-2$ sur sa diagonale, et l'on a la relation $A=PDP^{-1}$ où P est la matrice inversible dont les colonnes sont les vecteurs V_i. On résoud d'abord $y'=Dy$, ce qui donne $y_1=ae^t$, $y_2=be^{-2t}$, $y_3=ce^{-2t}$; alors $x=Py$ est solution du système différentiel proposé : on obtient ainsi $x=ae^tV_1+be^{-2t}V_2+ce^{-2t}V_3$ ($e^tV_1, e^{-2t}V_2, e^{-2t}V_3$ étant une base de l'espace vectoriel des solutions du système). Cette solution peut être aussi obtenue par la relation $x=e^{tA}V$ où $V=(a,b,c)$, dans laquelle $e^{tA}=Pe^{tD}P^{-1}$ (voir 7.5.8).

Chapitre VIII

8.1.5 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien H.*

Si F est complet, on a $F^{\perp\perp}=F$: on reprend mot pour mot la preuve donnée dans 1.4.9 dans le cas particulier où F est de dimension finie. Si F n'est pas complet mais H l'est, on utilise le fait que $\overline{F}$ est complet (car fermé dans H qui l'est) et $F^\perp=(\overline{F})^\perp$ (voir 3.1.9) pour écrire $F^{\perp\perp}=(\overline{F})^{\perp\perp}=\overline{F}$.

Supposons F et G complets et orthogonaux et soit (z_n) une suite de Cauchy dans $F+G$ (pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $z_n=x_n+y_n$ avec $x_n\in F$ et $y_n\in G$). Comme $\|z_n-z_m\|^2=\|x_n-x_m\|^2+\|y_n-y_m\|^2$ (puisque $x_n-x_m\in F$ et $y_n-y_m\in G$), les suites (x_n) et (y_n) sont de Cauchy dans F et G respectivement. Il existe donc $x\in F$ et $y\in G$ tels que $x_n\to x$ et $y_n\to y$, de sorte que $z_n=x_n+y_n\to x+y$. Par suite $F+G$ est complet.

Les sous-espaces F et G de $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ proposés on été étudiés dans 1.4.9 où l'on a vu que $F^\perp=\{0\}$ et que $G=K^\perp$ (où K est le sous-espace de E formé des fonctions constantes) ce qui implique que $G^\perp=K^{\perp\perp}=K$ (cette dernière égalité résultant du fait que K est de dimension finie) ; $F^\perp$ et $G^\perp$ sont donc complets. Si F était complet, on aurait $E=F\oplus F^\perp$ et donc $E=F$, ce qui est manifestement faux ; si G était complet, alors la somme $G+G^\perp$ le serait aussi, ce qui est faux puisque cette somme est égale à E qui ne l'est pas (voir 8.1.2). Pour voir si F et G sont fermés, on doit, d'après 4.2.8, vérifier si les formes linéaires $w(f)=f(0)$ et $\mu(f)=\int_0^1 f(x)dx$ sont continues ; or on a vu dans 2.4.9 que, pour la norme $\|\ \|_2$ associée au produit scalaire de E, μ est continue alors que w ne l'est pas. Par suite, $F=\mathrm{Ker}\,w$ n'est pas fermé (on retrouve donc que F n'est pas complet) alors que $G=\mathrm{Ker}\,\mu$ l'est.

8.3.7 *Le fait que, dans un espace euclidien, les bases hilbertiennes sont les bases orthonormées, résulte du fait que, en dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé (voir 5.1.30). Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base orthonomée d'un espace préhilbertien H ; elle vérifie*

$Vect(\{e_i|i\in I\})=H$ donc, a fortiori, $\overline{Vect(\{e_i|i\in I\})}=H$. C'est donc une base hilbertienne de H.

Les ϵ_n forment évidemment une base orthonormée de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$; ça n'est pas une base de l^2 puisque $Vect(\{\epsilon_n|n\in\mathbb{N}\})=\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}\neq l^2$; pour voir qu'elle est totale dans l^2, il suffit, ou bien d'utiliser le fait que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est dense dans l^2 (voir 7.2.5) ; ou bien, d'après 8.3.4 et 8.3.5 puisque l^2 est un espace de Hilbert (voir 8.1.2), de voir que tout élément $x=(x_n)$ de l^2, orthogonal à tous les ϵ_n, est nul : en effet, puisque l'on a $<x,\epsilon_n>=x_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On a vu dans 6.1.8 (le théorème de Stone-Weierstrass-Bernstein) que l'espace des fonctions polynomiales sur $[0,1]$ est dense dans $C([0,1],\mathbb{R})$ pour la norme de la convergence uniforme ; il l'est donc a fortiori pour la norme $\|\ \|_2$ de la convergence en moyenne quadratique associée au produit scalaire de $C([0,1],\mathbb{R})$, voir 1.5.7. De plus, en orthonormalisant, selon Gram-Schmidt, une suite totale, on obtient encore une suite totale puisque ces deux suites engendrent le même sous-espace vectoriel.

8.4.4 Soit $a=(a_n)\in l^2$; alors la série $\sum a_n\epsilon_n$ converge et a pour somme a puisque, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $s_n=\sum_{k=0}^n a_k\epsilon_k=(a_0,a_1,\dots,a_n,0,0,0,\dots)\to a$ dans l^2 (voir 7.2.5). Par contre, une telle série peut ne pas être normalement convergente : c'est le cas ici pour $a=(1/n)$.

Soit (e_n) une base hilbertienne d'un espace préhilbertien H et $x\in H$. L'égalité $x=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$ implique, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $<x,e_p>=\lim<\sum_{k=0}^n a_k e_k,e_p> =\lim\sum_{k=0}^n a_k<e_k,e_p>=\sum_{k=0}^{\infty} a_k<e_k,e_p>$ $=a_p$; d'où l'unicité de la décomposition de x sur la base (e_n). Enfin, le fait que $<x,e_n>\to 0$ résulte de la convergence de la série $\sum<x,e_n>^2$.

8.4.14 Considérons le sous-espace préhilbertien non complet $H=\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ de l^2 (voir 7.2.5) ; il possède une base orthonormée (donc hilbertienne) dénombrable : la suite (ϵ_n) (voir 8.3.7). Bien que $(1/n)\in l^2$, aucun $a\in\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ne peut s'écrire $a=\sum_{n=0}^{\infty}(1/n)\epsilon_n=(1/n)$.

8.4.15 Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. S'il possédait une base orthonormée $(e_i)_{i\in I}$, on aurait $Vect(\{e_i|i\in I\})=H$ et donc $\varphi(Vect(\{e_i|i\in I\})=\varphi(H)$, où $\varphi: H\to l^2(I)$ est l'isomorphisme isométrique cité ici dans la remarque 8.4.15 ; mais ceci est impossible lorsque I est infini, puisque le premier membre de cette égalité est l'espace $Vect(\{\epsilon_i|i\in I\})=\mathbb{R}^{(I)}$ des familles $(x_i)_{i\in I}$ de réels qui ne possèdent qu'un nombre fini de termes non nuls, alors que le second membre est égal à $l^2(I)$.

8.5.2 Fixons un réel $T>0$ et considérons l'application $\varphi: C^{\mu}_{(T)}(\mathbb{R},\mathbb{C})\to C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ où, pour tout $f\in C^{\mu}_{(T)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, l'application $\varphi(f)$ est définie par $(\varphi(f))(x)=f(Tx/2\pi)$ (il est facile de vérifier que $\varphi(f)$ est bien 2π-périodique lorsque f est T-périodique). Cette application est une bijection linéaire, et le produit scalaire "image réciproque" (voir 1.4.4), du produit scalaire de $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, est le produit scalaire proposé sur $C^{\mu}_{(T)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Ainsi, l'application φ ci-dessus est un isomorphisme isométrique pour ces produits scalaires ; l'espace préhilbertien $C^{\mu}_{(T)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est donc, lui-aussi, non complet. De plus, pour $a\in\mathbb{R}$ et $f\in C^{\mu}_{(T)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on a $\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T}f(x)dx$ $=-\int_0^a f(x)dx+\int_0^T f(x)dx+ \int_0^a f(y)dy=\int_0^T f(x)dx$, en posant $x=y+T$ dans la 3ème intégrale et en utilisant la périodicité de f.

8.5.15 Soit $f\in C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; pour calculer facilement les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ selon la parité de f, il vaut mieux intégrer sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ (voir 8.5.2), sachant que toute fonction impaire est d'intégrale nulle sur un tel intervalle. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\sum_{k=-n}^n c_n(f)e^{ikx}=c_0(f)+\sum_{k=1}^n(c_k(f)e^{ikx}+c_{-k}(f)e^{-ikx})=c_0(f)+\sum_{k=1}^n(c_k(f)e^{ikx}+\overline{c_k(f)e^{ikx}})=$ $a_0(f)/2+\sum_{k=1}^n 2Re(c_k(f)e^{ikx})$; on passe à la limite (quand elle existe ; voir 8.5.8) pour obtenir l'expression proposée pour la somme de la série de Fourier de f en x.

Soit f la fonction définie par $f(x)=|x|$ sur $[-\pi,\pi]$; comme elle est continue et vérifie $f(-\pi)=\pi=f(\pi)$, on peut la prolonger à $\mathbb{R}$, 2π-périodiquement, en une fonction continue (voir 0.4.7). f étant paire, on a $b_n(f)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On obtient $a_0(f)=\pi$ et $a_n(f)=0$ ou $-4/\pi n^2$

selon que n est pair ou non. On en déduit immédiatement (voir 8.5.9) que S^f converge normalement et que $S^f(x)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, où $S^f(x)=\pi/2-(4/\pi)\sum_{n=1}^{\infty}(\cos(2n-1)x)/(2n-1)^2$. En particulier $S^f(x)=|x|$ pour tout $x\in[-\pi,\pi]$. Pour $x=0$, on obtient $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n-1)^2=\pi^2/8$. L'égalité $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2=\pi^2/6$ provient alors du fait que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2=\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n)^2+\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n-1)^2$. De plus, l'égalité de Parseval-Bessel s'écrit $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2=||f||^2$, avec ici $4|c_n(f)|^2=a_n(f)^2$ et $||f||^2=(1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} x^2dx=\pi^2/3$; on obtient donc bien $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n-1)^4=\pi^4/96$.

La série de Fourier de g ne peut converger uniformément puisque g n'est pas continue (voir 8.5.9) : en effet, c'est un élément de $C^{\mu}_{(2\pi)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dont les points de discontinuité sont les $k\pi$. Par contre, elle converge simplement vers g puisque g remplit, en tout point, les conditions du théorème de Dirichlet 8.5.13. Comme $g(x)=f'(x)$ pour tout $x\neq k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$, g est la quasi-dérivée de f qui est, elle-même, une fonction μ-C^1 par morceaux 2π-périodique (voir 0.4.6) ; on peut donc utiliser 8.5.10 : la série de Fourier de g s'obtient en dérivant termes à termes celle de f : ainsi $S^g(x)=(4/\pi)\sum_{n=1}^{\infty}(\sin(2n-1)x)/(2n-1)$. En particulier, on a $S^g(\pi/2)=g(\pi/2)=1$, i.e. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/(2n-1)=\pi/4$.

Supposons que f soit une solution 2π-périodique réelle de l'équation différentielle $y-y''=\cos x\cos 2x$; f est donc de classe C^{∞} ($f''(x)=f(x)-\cos x\cos 2x$ est de classe C^1 ...etc), de sorte que les séries de Fourier de f et de ses dérivées f', f'' ... convergent normalement et on obtient celles de f' et f'' par des dérivations termes à termes de celle de f (voir 8.5.11). Si $S^f(x)=a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, alors $(S^{f-f''})(x)=S^f(x)-S^{f''}(x)=a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}(1+n^2)(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$. Il reste à remarquer que $\cos x\cos 2x=(1/2)\cos x+(1/2)\cos 3x$ est la série de Fourier de la fonction $\cos x\cos 2x$ et donc de $f-f''$ (par unicité de la série de Fourier ; voir 8.4.4), et donc à identifier les coefficients de ces deux séries de Fourier. On obtient une seule solution 2π-périodique : la fonction $f(x)=(1/4)\cos x+(1/20)\cos 3x$.

Chapitre IX

9.1.4 *Soit a,b deux réels vérifiant $a\leq b$; si $t\in[0,1]$ et $c=a+t(b-a)$, alors $a\leq c\leq b$; si $a\leq c\leq b$, alors il existe un $t\in[0,1]$ tel que $c=a+t(b-a)$: si $a\neq b$, on prend $t=(c-a)/(b-a)$, sinon $a=c=b$, donc tout $t\in[0,1]$ convient. Ainsi, dans $\mathbb{R}$, les segments sont exactement les intervalles fermés et bornés.*

Si $[a,b]$ est un segment d'un espace vectoriel E, il est convexe puisqu'il s'écrit $[a,b]=f([0,1])$ où $f:\mathbb{R}\to E : t\mapsto a+t(b-a)$ est affine (voir 9.1.1 et 9.1.2).

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties convexes d'un espace vectoriel, et $x,y\in\bigcap_{i\in I} A_i$; on a donc $[x,y]\subset A_i$ pour tout $i\in I$, i.e. $[x,y]\subset\bigcap_{i\in I} A_i$. Dans $\mathbb{R}^2$, la réunion des deux axes n'est pas convexe (car seules les extrémités du segment $[(0,1),(1,0)]$ sont dans cette réunion) et pourtant chacun des axes est convexe (ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$). Considérer enfin l'application continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 : x\mapsto(x,x^2)$; son image $f(\mathbb{R})$ n'est pas convexe (c'est la parabole P d'équation $y=x^2$; et l'on a $(x,1)\notin P$ pour tout $-1<x<1$), alors que $\mathbb{R}$ est convexe.

9.2.12 *La sphère $\mathbb{S}^1_2$ est connexe par arcs car : elle s'écrit $\epsilon(\mathbb{R})$ où $\epsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 : \theta\mapsto(\cos\theta,\sin\theta)$, ou bien car c'est la réunion de deux connexes par arcs d'intersection non vide (les deux demi-cercles d'équations respectives $y=\sqrt{1-x^2}$ et $y=-\sqrt{1-x^2}$, tous deux homéomorphes à $[-1,1]$ comme graphes d'applications continues définies sur $[-1,1]$ ... ou bien $\mathbb{S}^1_2-\{W\}$ et $\mathbb{S}^1_2-\{E\}$, tous deux homéomorphes à $\mathbb{R}$, où $W=(-1,0)$ et $E=(1,0)$ (voir 4.3.3)) ; en s'inspirant de la deuxième preuve ci-dessus, on prouve que la sphère $\mathbb{S}^2_2$ est connexe par arcs : c'est en effet la réunion des deux hémisphères $\mathbb{S}^2_+=\{(x,y,z)\in\mathbb{S}^2_2|z\geq 0\}$ et $\mathbb{S}^2_-=\{(x,y,z)\in\mathbb{S}^2_2|z\leq 0\}$ (d'intersection non vide : c'est l'équateur $\{(x,y,z)\in\mathbb{S}^2_2|z=0\}=\mathbb{S}^1_2\times\{0\}$, homéomorphe à $\mathbb{S}^1_2$) toutes deux homéomorphes à $B'_2((0,0),1)$ comme graphes des applications continues $f_+:B'_2((0,0),1)\to\mathbb{R} : (x,y)\mapsto\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ et $f_-:B'_2((0,0),1)\to\mathbb{R} : (x,y)\mapsto-\sqrt{1-(x^2+y^2)}$. On procède de même pour le cône : $\widehat{C}=\widehat{C}_+\cup\widehat{C}_-$ où $\widehat{C}_+=\{(x,y,z)\in\widehat{C}|z\geq 0\}$ et $\widehat{C}_-=\{(x,y,z)\in\widehat{C}|z\leq 0\}$ sont d'intersection non vide (réduite à l'origine : voir figure 16) et connexes par arcs car homéomorphes à $\mathbb{R}^2$ comme graphes des applications*

continues $g_+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ *et* $g_- : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto -\sqrt{x^2+y^2}$. *De même,* $\mathbb{S}_2^1 \star \mathbb{S}_2^1$ *est connexe par arcs comme réunion de deux cercles (connexes par arcs) d'intersection non vide (voir figure* 6 *et* 1.5.11*).*

La connexité par arcs de X, El, P, Cyl *et* $\mathbb{T}$ *résulte des homéomorphismes* $X \simeq \mathbb{S}_2^1 \simeq El$, $P \simeq \mathbb{R}$, $Cyl \simeq \mathbb{S}_2^1 \times \mathbb{R}$ *et* $\mathbb{T} \simeq \mathbb{S}_2^1 \times \mathbb{S}_2^1$ *établis dans* 4.3.3, 4.4.6 *et* 5.1.19.

Les hyperboles H *et* H' *ne sont pas connexes par arcs car elles sont homéomorphes à* $\mathbb{R}^*$ *qui ne l'est pas (ça n'est pas un intervalle) ; voir* 4.3.3 *et* 4.4.6.

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue, les surfaces* $f_\leq$, $f_\geq$, $f_<$ *et* $f_>$ *sont connexes par arcs puisque* $f_\leq \simeq f_\geq \simeq \mathbb{R} \times [0,+\infty[$ *et* $f_< \simeq f_> \simeq \mathbb{R}^2$ *(voir* 4.4.6*).*

Pour $f,g : I \to \mathbb{R}$ *continues vérifiant, pour tout* $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ *(resp.* $f(x) < g(x)$*), la surface* $[f,g]$ *(resp.* $]f,g[$*) est connexe par arcs comme image continue d'un connexe par arcs : elle s'écrit* $\beta(I \times [0,1])$ *(resp.* $\beta(I \times]0,1[)$*) où* $\beta : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *est définie par* $\beta(x,t) = (x, f(x) + t(g(x) - f(x)))$.

$\mathbb{S}_2^1$ *et* $D = \mathbb{R} \times \{0\}$ *sont connexes par arcs et pourtant* $A = \mathbb{S}_2^1 \cap D = \{(-1,0),(1,0)\}$ *ne l'est pas (il est homéomorphe à* $\{-1,1\}$*). Comme on peut écrire aussi* $A = \overset{-1}{\pi_2}(\{0\})$, *où* $\pi_2 : \mathbb{S}_2^1 \to \mathbb{R}$ *est la seconde projection, les connexes par arcs ne sont pas stables par image réciproque d'application continue.*

La fonction $f(x,y) = 2xy$ *étant continue, elle est bornée et atteint ses bornes sur les compacts* $\mathbb{S}_2^1$ *et* $B_2'((0,0),1)$ *; soit* a *et* b *(resp.* c *et* d*) les bornes de* f *sur* $\mathbb{S}_2^1$ *(resp. sur* $B_2'((0,0),1)$*). Utilisant alors aussi la connexité par arcs de* $\mathbb{S}_2^1$ *et* $B_2'((0,0),1)$, *on sait (voir* 5.1.7 *et* 9.2.6*) que* $f(\mathbb{S}_2^1) = [a,b] \subset [c,d] = f(B_2'((0,0),1))$. *Pour le calcul de* a *et* b, *il suffit de considérer le composé* $g : \mathbb{R} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{S}_2^1 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, *où* $\varepsilon(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, *dont les bornes sont encore* a *et* b *; comme* $g(\theta) = 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$, *on obtient* $a = -1$ *et* $b = 1$. *Il reste alors à comparer ces extrema de* f *sur* $\mathbb{S}_2^1$ *à ceux éventuellement atteints (forcément en des points critiques ; voir DEUG) sur la boule ouverte* $B_2((0,0),1)$ *; comme* $(0,0)$ *est le seul point critique de* f *sur cette boule (seule solution de* $f_x' = f_y' = 0$*), et qu'il vérifie* $f(0,0) = 0$, *on en déduit que* $a = c$ *et* $b = d$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $Gr(f)$ *son graphe. Si elle est continue, on sait que* $Gr(f)$ *est homéomorphe à* $\mathbb{R}$ *(voir* 4.4.4*), donc connexe par arcs. Si* $Gr(f)$ *est connexe par arcs, on considère la première projection* $\pi_1 : Gr(f) \to \mathbb{R} : (x, f(x)) \mapsto x$ *; c'est une bijection continue donc un homéomorphisme, vue l'hypothèse. En composant l'inverse de cette application avec la seconde projection* $\pi_2 : Gr(f) \to \mathbb{R}$, *on obtient* f *qui est donc continue.*

Σ *est connexe par arcs puisqu'homéomorphe à* $]0,+\infty[$ *(c'est le graphe de l'application continue* σ *: voir figure* 16*) ; sa fermeture est* $(\{0\} \times [-1,1]) \cup \Sigma$ *qui n'est pas connexe par arcs (voir* [1] 4.3.4*).*

9.3.7 *Qu'un espace discret ayant au moins deux éléments ne puisse être connexe résulte du fait que tous ses points sont des ouverts fermés ! Par suite, dans un tel espace* E, *toute boule de rayon* $r > 1$ *est non connexe, car elle est égale à* E *(voir* 1.2.3*).* $(\mathbb{R}, d_0)$ *est donc non connexe ; et pourtant* $\mathbb{R}$ *est convexe ! en fait, on ne peut utiliser ici* 9.2.2 *puisque, bien que* $\mathbb{R}$ *soit un espace vectoriel,* d_0 *ne dérive pas d'une norme (voir* 1.3.15*).*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue ouverte et fermée. Prouvons que c'est une bijection. Elle est surjective car* $f(\mathbb{R})$ *est une partie ouverte, fermée et non vide du connexe* $\mathbb{R}$ *: elle doit donc vérifier* $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. *Soit maintenant deux réels* a *et* b *vérifiant* $a < b$. f *étant continue, l'image* $f([a,b])$ *est un intervalle compact* $[c,d]$. *Comme* f *est aussi ouverte, l'image* $f(]a,b[)$ *est un intervalle ouvert non vide, inclus dans* $[c,d]$, *qui ne diffère de* $[c,d]$ *que par ses extrémités : par suite* $f(]a,b[) =]c,d[$ *avec* $c \neq d$, *de sorte que* $f(a), f(b) \in \{c,d\}$ *et donc* $f(a) \neq f(b)$. *Ce qui prouve que* f *est injective.*

9.3.12 *On considère les connexes* $A =]0,1[$ *et* $B =]1,2[$ *; ils vérifient* $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, *et pourtant* $A \cup B$ *n'est pas connexe (ça n'est pas un intervalle).*

9.3.13 *Il suffit de remarquer que* $\Sigma_0 = (]-\infty,0] \times \{0\}) \cup \Sigma$, *où* Σ *est le graphe de l'application* σ *définie dans* 9.2.12 *; en effet, on peut utiliser* 9.3.11 *puisque* $]-\infty,0] \times \{0\}$ *et* Σ *sont deux*

connexes par arcs (voir 9.2.11 et 9.2.12) qui sont d'intersection vide, mais qui vérifient $(]-\infty,0]\times\{0\})\cap\overline{\Sigma}=(]-\infty,0]\times\{0\})\cap((\{0\}\times[-1,1])\cup\Sigma)=\{0\}\neq\emptyset$ *(voir 9.2.12 et [1] 4.3.4 pour* $\overline{\Sigma}$*).*

9.3.23 *Dans* $\mathbb{R}^2$*, la réunion* B *des boules unités fermées* $B_2'((-1,0),1)$ *et* $B_2'((1,0),1)$ *est connexe (comme réunion de deux connexes par arcs d'intersection non vide), mais* $\overset{\circ}{B}$ *ne l'est pas : elle possède deux composantes connexes : les boules ouvertes* $B_2((-1,0),1)$ *et* $B_2((1,0),1)$ *qui en forment une partition ouverte (voir 9.3.18).*

Les composantes connexes de $\mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{Q}$ *sont leurs points (qui forment respectivement une partition de* $\mathbb{Z}$ *et de* $\mathbb{Q}$*) puisque ces points sont les seuls intervalles qu'ils contiennent.*

Les composantes connexes de H *sont les ouverts de* H *suivants :* $H_+=\{(x,y)\in H|x>0\}$ *et* $H_-=\{(x,y)\in H|x<0\}$ *(ils forment une partition de* H *; ils sont connexes car homéomorphes à* $]0,+\infty[$*) ; les composantes connexes de* $A=H\cup Cr$ *sont* H_+*,* H_- *et* Cr *(qui forment une partition fermée de* A *: par exemple,* $H_+=\{(x,y)\in A|xy=1 \text{ et } x\geq 0\}$*) ; par contre,* $B=H\cup\Delta$ *est connexe comme réunion de trois connexes par arcs d'intersections deux-à-deux non vides (voir 9.2.8) ; enfin, les composantes connexes de* $\mathbb{R}^2-\mathbb{S}_2^1$ *sont* $B_2(O,1)$ *et* $(B_2'(O,1))^c$ *; voir 9.1.3 et 9.2.9.*

L'espace Ω *proposé est compact car c'est un fermé (comme intersection de deux fermés) borné (car inclus dans la sphère d'équation* $x^2+y^2+z^2=4$*) de* $\mathbb{R}^3$*. Par contre, il n'est pas connexe : montrons que* $\Omega_+=\{(x,y,z)\in\Omega|z\geq 0\}$ *et* $\Omega_-=\{(x,y,z)\in\Omega|z\leq 0\}$ *sont les composantes connexes de* Ω *(figure 18). Comme ils forment une partition fermée de* Ω *(ils sont disjoints car* $(x,y,z)\in\Omega$ *et* $z=0$ *impliquent* $y^2=-1$*), il reste à vérifier que* Ω_+ *est connexe (*Ω_- *le sera aussi puisqu'il est homéomorphe à* Ω_+ *par l'homéomorphisme* $\varphi:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3:(x,y,z)\mapsto(x,y,-z)$*) ; remarquant que* $(x,y,z)\in\Omega_+ \Longleftrightarrow (x^2+2y^2=3 \text{ et } z=\sqrt{1+y^2})$*, on voit que* $\Omega_+=f(El)$*, où* El *est l'ellipse d'équation* $(1/3)x^2+(2/3)y^2=1$ *et* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3:(x,y)\mapsto(x,y,\sqrt{1+y^2})$ *; on utilise alors la continuité de* f *et le fait que* El *est connexe (car homéomorphe à la sphère* $\mathbb{S}_2^1$ *par l'homéomorphisme* $(x,y)\mapsto(\sqrt{3}x,\sqrt{3/2}y)$*) ; voir [1] 4.4.4.*

On peut écrire $\Gamma_r=\Gamma_r^+\cup\Gamma_r^-$*, où* $\Gamma_r^+=\{(x,y,z)\in\Gamma_r|z\geq 0\}$ *et* $\Gamma_r^-=\{(x,y,z)\in\Gamma_r|z\leq 0\}$ *sont deux fermés de* Γ_r *(figure 19) ; ils sont connexes : en effet, on a* $\Gamma_r^-\simeq\Gamma_r^+$*, toujours grâce à l'homéomorphisme* φ *ci-dessus ; et* $\Gamma_r^+=g(C_r)$*, où* $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3:(x,y)\mapsto(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$ *est continue, et* C_r *est le cercle de* $\mathbb{R}^2$*, de centre* $(1,0)$ *et de rayon* r *(*C_r *est connexe car homéomorphe à* $\mathbb{S}_2^1$*). Reste donc à étudier* $A=\Gamma_r^+\cap\Gamma_r^-$ *selon les valeurs de* r*. En fait, comme* $A=\{(0,0,0)\}$ *ou* $\emptyset$*, selon que* $r=1$ *ou non, on en déduit que* Γ_r *est connexe si* $r=1$ *(comme réunion de deux connexes d'intersection non vide), et non connexe si* $r\neq 1$*, ses composantes connexes étant alors* Γ_r^+ *et* Γ_r^- *(voir 9.3.18 et [1] 4.4.5).*

Si $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ *était un homéomorphisme, sa restriction* $f:]a,b[\to\mathbb{R}-\{f(a)\}$ *en serait encore un ; mais ceci est impossible car* $]a,b[$ *est connexe alors que* $\mathbb{R}-\{f(a)\}$ *ne l'est pas.*

$[0,1]$ *étant compact, il ne peut être homéomorphe à* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}^*$ *qui ne le sont pas ;* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}^*$ *ne sont pas homéomorphes car* $\mathbb{R}$ *est connexe contrairement à* $\mathbb{R}^*$*.*

H' *étant non compact (puisqu'homéomorphe à* $\mathbb{R}^*$ *: voir 4.3.3 et 4.4.6), il ne peut être homéomorphe à* $\mathbb{S}_2^1$ *et* $C=\mathbb{S}_2^1\cup\{(0,0)\}$ *qui eux sont compacts ; ces deux derniers ne peuvent être homéomorphes puisque* $\mathbb{S}_2^1$ *est connexe alors que* C *possède deux composantes connexes (les ouverts connexes de* C *suivants :* $\{(0,0)\}=C\cap B_2((0,0),1)$ *et* $\mathbb{S}_2^1=C\cap(\mathbb{R}^2-\{(0,0)\})$*) ; voir 4.3.13).*

INDEX

Les numéros cités ci-dessous correspondent à ceux du cours.

Les définitions sont citées là où les "objets" mathématiques apparaissent pour la première fois ; on rajoute les numéros où l'on a mis en évidence certaines des propriétés remarquables de ces objets. Quant aux exemples (ou contre-exemples), on les suit à chacune de leurs occurences dans le cours ou les solutions ; les références à l'épilogue sont précédées de "Epil".

Cet index est divisé en trois parties : symboles, *où l'on donne la liste des symboles utilisés pour représenter les objets mathématiques ; quelques exemples* d'espaces homéomorphes ou non, *essentiellement, ceux que l'on trouve dans cet ouvrage ;* terminologie, *où l'on donne les noms attribués aux symboles. On tente d'être le plus complet possible sans toutefois être exhaustif.*

1. Symboles

2. Quelques espaces homéomorphes ou non

Voir quelques exemples d'espaces métriques non homéomorphes dans : 5.1.15 ; 5.1.19 ; 9.3.21 ; 9.3.23 ; 9.3.24.

3. Terminologie

BIBLIOGRAPHIE

[1] Burroni Elisabeth, Penon Jacques : La géométrie du caoutchouc, Topologie.
Ellipses, Paris, 2000.

[2] Christol Gilles, Cot Anne, Marle Charles-Michel : Topologie.
Ellipses, Paris, 1997.

[3] Skandalis Georges : Topologie et analyse.
Dunod, Paris, 2001.

La collection *Mathématiques à l'Université* se propose de mettre à la disposition des étudiants de troisième, quatrième et cinquième années d'études supérieures en mathématiques des ouvrages couvrant l'essentiel des programmes actuels des universités françaises. Certains de ces ouvrages peuvent être utiles aussi aux étudiants qui préparent le CAPES ou l'agrégation, ainsi qu'aux élèves des grandes écoles.
Nous avons voulu rendre ces livres accessibles à tous : les sujets traités sont présentés de manière simple et progressive, tout en respectant scrupuleusement la rigueur mathématique. Chaque volume comporte un exposé du cours avec des démonstrations détaillées de tous les résultats essentiels et de nombreux exercices. Les auteurs de ces ouvrages ont tous une grande expérience de l'enseignement des mathématiques au niveau supérieur.

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants qui entrent en L3, la troisième année de la nouvelle licence et ne suppose donc que les acquis des deux premières années, L1 et L2, de cette licence (qui correspondent à l'ancien DEUG) dont on rappelle les éléments vraiment utiles ici dans le chapitre préliminaire. On y enseigne une topologie allégée, celle des espaces métriques (i.e. munis d'une distance). Cette topologie est bien suffisante pour la grande majorité des utilisateurs, par exemple pour les étudiants de la licence MASS, de la licence préparatoire au CAPES, pour ceux qui préparent l'agrégation (interne ou non) ou encore ceux des classes préparatoires aux grandes écoles ; elle nous permet de toute façon d'étudier en détail les espaces de Banach et les espaces de Hilbert.

De très nombreux exercices, cités en exemple ou dans les remarques, accompagnent les énoncés du cours , on en donne des solutions détaillées en fin d'ouvrage.

ISBN 2-7298-2564-9